الحلول الكاملة لكتيب ثالث متوسط وأول ثانوي 2021

9-10 Junior 2021

إخراج اللجنة العلمية

أ هادي غروي أ طارق فضل

د عبد العزيز بن عبيد

إشراف

أ صفوت الطناني

3 points problems — مسائل الثلاث نقاط

1– يُسمى ثالث خميس من شهر مارس في كل عام بيوم الكانجارو. موضح أدناه تواريخ يوم الكانجارو لعدد من السنوات القادمة، وأحد هذه التواريخ خاطئ. ما التاريخ الخاطئ؟

1. Each year, the third Thursday in March is named Kangaroo Day. The dates of Kangaroo Day for the next few years are shown below, with one error. Which date is wrong?

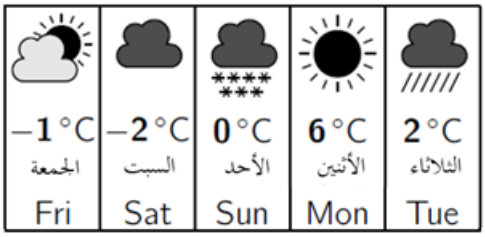
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
17 مارس 2022 17 March 2022	16 مارس 2023 16 March 2023	14 مارس 2024 14 March 2024	20 مارس 2025 20 March 2025	19 مارس 2026 19 March 2026

الحل هو (C)

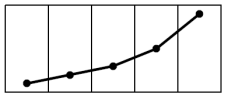
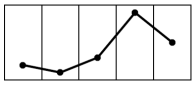
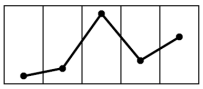
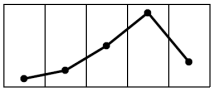
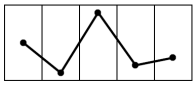
بملاحظة أن الأسبوع الأول من مارس يبدأ يوم 1 مارس وينتهي يوم 7 مارس، وبالتالي الأسبوع الثاني يبدأ يوم 8 مارس وينتهي يوم 14، وبالتالي الأسبوع الثالث من مارس يبدأ يوم 15 مارس وينتهي يوم 21 مارس.

إذن التاريخ الخاطئ هو 14 من شهر مارس من عام 2024 لأنه سيكون في الأسبوع الثاني ولا يمكن أن يكون الخميس الثالث.

2–عندما نظرت رنا في تطبيق الطقس لديها والذي يوضح حالة الطقس المتوقعة ودرجات الحرارة العظمى للأيام الخمسة المقبلة. شاهدت الصورة التالية. أي مما يأتي يعبر عن التمثيل البياني لدرجات الحرارة العظمى؟



2. Rana looks at her weather app that shows the predicted weather and maximum temperatures for the next five days. Which of the following represents the corresponding graph of maximum temperatures?

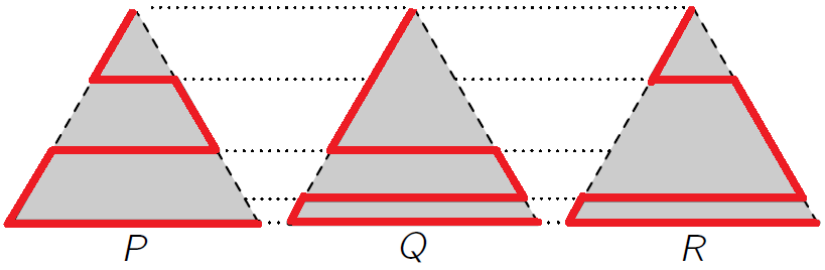
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
				

الحل هو (B)

أقل درجة حرارة كانت يوم السبت وهو اليوم الثاني في الرسم من اليسار لليمين. ويحقق ذلك فقط الخياران B, E لذا نستبعد باقي الخيارات.

بينما أعلى درجة حرارة كانت يوم الأثنين وهو اليوم الرابع في الرسم. ويحقق ذلك فقط الخيار B ، ولا يحققه الخيار E .

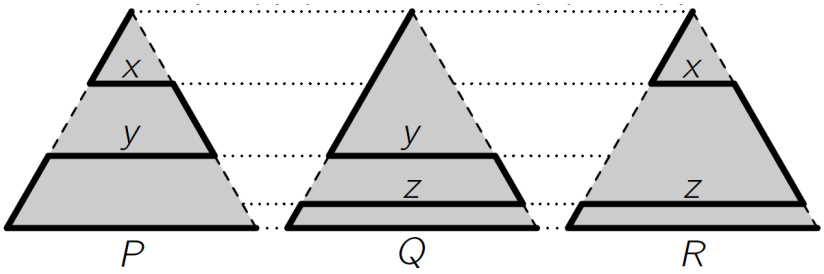
3- منتزه على شكل مثلث متطابق الأضلاع. تريد قطة أن تسير على طول أحد المسارات الثلاثة الموضحة بالشكل من الركن العلوي إلى الركن الأيمن السفلي (المسارات الحمراء السميكة). P و Q و R تمثل أطوال المسارات، كما في الشكل. أي العبارات التالية صحيحة عن أطوال المسارات الثلاثة؟



3. A park is shaped like an equilateral triangle. A cat wants to walk along one of the three indicated paths (thicker lines) from the upper corner to the lower right corner. The lengths of the paths are P, Q and R, as shown. Which of the following statements about the lengths of the paths is true?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
P < Q < R	P < R < Q	P < Q = R	P = R < Q	P = Q = R

الحل هو (B)



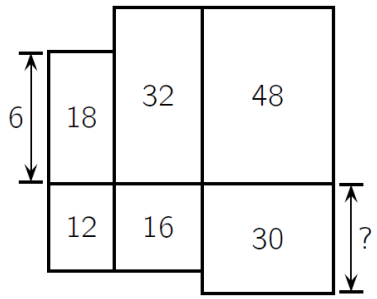
بملاحظة أن أجزاء المسارات التي تمر عبر أضلاع المثلثات المتطابقة الأضلاع تكون متطابقة (لأن مجموع أطوال تلك الأجزاء في كل مثلث يساوي مجموع طولي ضلعين من المثلث المتطابق الأضلاع الذي يمثل المنتزه، وهو ثابت).

إذن نحتاج فقط لمقارنة أجزاء المسارات الداخلية.

لتكن أطوال أجزاء المسارات الداخلية هي x, y, z و من الواضح أن $x < y < z$،

وبالتالي $x + y < x + z < z + y$ ، ومنها $P < R < Q$.

4– ستة مستطيلات مرتبة كما موضح بالشكل. ارتفاع المستطيل الأيسر العلوي $6\ cm$. تشير الأعداد داخل المستطيلات إلى مساحتها بوحدة cm^2. ما ارتفاع المستطيل الأيمن السفلي؟



4. Six rectangles are arranged as shown. The top left-hand rectangle has height $6\ cm$. The numbers within the rectangles indicate their areas in cm^2. What is the height of the bottom right hand rectangle?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$4\ cm$	$5\ cm$	$6\ cm$	$7.5\ cm$	$10\ cm$

الحل هو (B)

نعلم أن مساحة المستطيل تساوي الطول ضرب العرض.

إذن عرض المستطيل الأيسر العلوي هو $18 \div 6 = 3\ cm$ **وهو نفسه عرض المستطيل الأيسر السفلي.**

إذن طول المستطيل الأيسر السفلي هو $12 \div 3 = 4\ cm$ **وهو نفسه طول المستطيل الأوسط السفلي.**

إذن عرض المستطيل الأوسط السفلي هو $16 \div 4 = 4\ cm$ **وهو نفسه عرض المستطيل الأوسط العلوي.**

إذن طول المستطيل الأوسط العلوي هو $32 \div 4 = 8\ cm$ **وهو نفسه طول المستطيل الأيمن العلوي.**

إذن عرض المستطيل الأيمن العلوي هو $48 \div 8 = 6\ cm$ **وهو نفسه طول المستطيل الأيمن السفلي.**

إذن عرض المستطيل الأيمن السفلي هو $30 \div 6 = 5\ cm$.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

5– إذا كانت نتيجة الشوط الأول من مباراة كرة اليد هي $9:14$، هذا يعني أن الفريق الزائر كان متقدماً بخمسة أهداف. ونتيجة لتعليمات المدرب بين شوطي المباراة، سيطر الفريق المضيف وسجل ضعف عدد الأهداف التي سجلها الفريق الزائر في الشوط الثاني، إذا فاز الفريق المضيف بالمباراة بفارق هدف واحد. فما هي النتيجة النهائية للمباراة؟

5. The halftime score of a handball match was $9:14$, thus the visiting team was leading by five goals. As a consequence of coach instructions received at halftime, the home team dominated in the second half and scored twice as many goals as their opponents. The home team won the match by one goal. What was the final score of the match?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$20:19$	$21:20$	$22:21$	$23:22$	$24:23$

الحل هو (B)

بفرض عدد الأهداف التي سجلها الفريق الضيف في الشوط الثاني هو x.

إذن عدد الأهداف التي سجلها الفريق المضيف في الشوط الثاني هو $2x$.

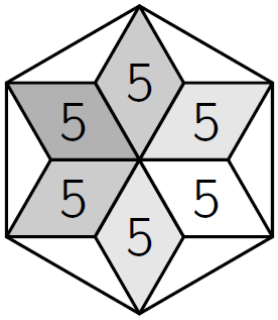
من جهة أخرى كان الفريق المضيف متأخرًا بفارق 5 أهداف بعد نهاية الشوط الأول، ثم عاد وتقدم بفارق هدف واحد مع نهاية الشوط الثاني، هذا يعني أنه سجل عددًا من الأهداف في الشوط الثاني يزيد بـ 6 أهداف عن الفريق الضيف.

الآن يمكننا تكوين المعادلة: $2x = x + 6$، ومنها $x = 6$.

إذن نتيجة الشوط الثاني $6:12$.

وبالتالي نتيجة المباراة النهائية $21:20$.

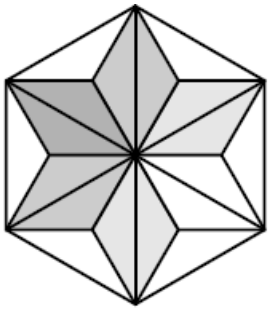
6– الشكل التالي يوضح نجمة مكونة من ستة معينات متطابقة مساحة كل منها $5\ cm^2$. تم توصيل أطراف النجمة لرسم مضلع سداسي منتظم كما موضح بالشكل. ما مساحة السداسي المنتظم؟



6. Six congruent rhombuses, each of area $5\ cm^2$, form a star. The tips of the star are joined to draw a regular hexagon, as shown. What is the area of the hexagon?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$36\ cm^2$	$40\ cm^2$	$45\ cm^2$	$48\ cm^2$	$60\ cm^2$

الحل هو (C)



بعد تقسيم كل معين إلى مثلثين مساحة كل منها $2.5\ cm^2$.

لدينا 18 مثلثًا جميعها متطابقة.

ولذلك مساحة السداسي المنتظم $18\times 2.5 = 45\ cm^2$.

حل آخر:

كل مثلثين يكونان معينًا.

لدينا 9 معينات مساحة كل منها $5\ cm^2$.

مساحة السداسي المنتظم $9\times 5 = 45\ cm^2$.

7- يتكون فريق الخدمة المجتمعية لإحدى الجمعيات الخيرية من 6 أعضاء: أحمد وماجد وبدر (كلهم في نفس العمر)، والأعضاء الثلاثة الآخرون أعمارهم هي 19,20,21 عامًا. إذا علمت أن متوسط أعمار الفريق هو 21 عامًا. كم يبلغ عمر بدر؟

7. The community service team of a charity consists of 6 members: Ahmed, Majed and Badr (all of them are of the same age), the other three members are 19, 20 and 21 years old. If you know the average age of the team is 21. How old is Badr?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
20	21	22	23	24

الحل هو (C)

بفرض أن عمر بدر هو x.

بما أن المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي ناتج قسمة مجموع القيم على عددها،

إذن يمكننا الآن تكوين المعادلة:

$$\frac{x+x+x+21+20+19}{6}=21$$

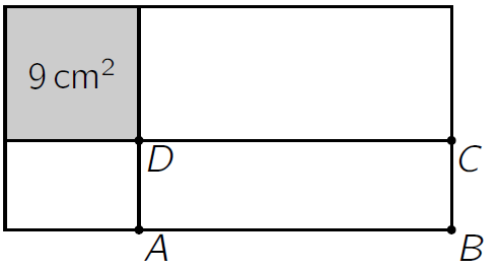
$$\Rightarrow 3x+21+20+19=6\times 21$$

$$\Rightarrow 3x+60=126$$

$$\Rightarrow 3x=66$$

$$\Rightarrow x=22$$

8- مستطيل محيطه $30\ cm$ ، تم تقسيمه إلى أربعة أقسام بخطين أحدهما رأسي والآخر أفقي. أحد هذه الأقسام مربع مساحته $9\ cm^2$ كما موضح بالشكل. ما محيط المستطيل $ABCD$ ؟



8. A rectangle with perimeter $30\ cm$ is divided into four parts by a vertical line and a horizontal line. One of the parts is a square of area $9\ cm^2$, as shown in the figure. What is the perimeter of rectangle $ABCD$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$14\ cm$	$16\ cm$	$18\ cm$	$21\ cm$	$24\ cm$

الحل هو (C)

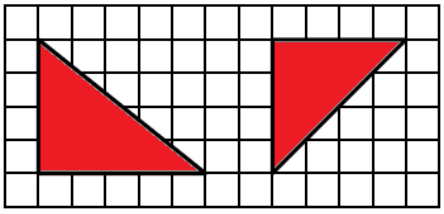
محيط المستطيل $ABCD$ **+ محيط المربع = محيط المستطيل الأصلي.**

بما أن طول ضلع المربع $\sqrt{9}=3\ cm$ **، إذن محيط المربع** $3\times4=12\ cm$.

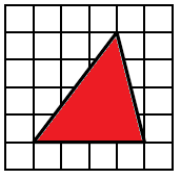
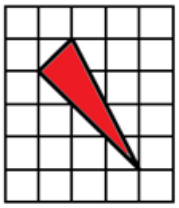
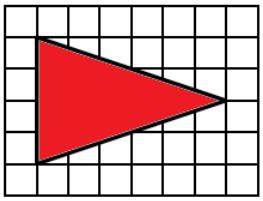
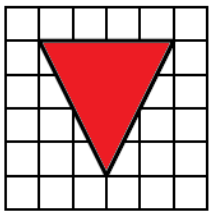
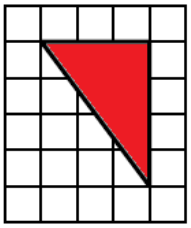
وأخيرًا محيط المستطيل $ABCD$ **هو** $30-12=18\ cm$.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

9- رسم علي ثلاثة مثلثات على شبكة مربعات. مثلثان منهم فقط لهما المساحة نفسها، ومثلثان منهم فقط متطابقا الضلعين، ومثلثان منهم فقط قائما الزاوية. الشكل التالي يوضح مثلثان منهم. أي مما يلي هو المثلث الثالث؟



9. Aly drew three triangles on a grid. Exactly two of them have the same area, exactly two of them are isosceles, and exactly two are right-angled triangles. Two of the triangles are shown. Which could be the third one?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
				

الحل هو (D).

نعلم أن مساحة المثلث تساوي نصف ضرب القاعدة ضرب الارتفاع.

لأن المثلثين في الشكل المعطى قائما الزاوية ومساحتيهما 10 و 8، وأحدهما فقط متطابق الساقين،

فإننا نبحث عن مثلث متطابق الضلعين وغير قائم الزاوية ومساحته إما 8 أو 10.

لذا نستبعد الخيارات A,B,E لأن المثلثات في كل منها غير متطابقة الضلعين.

في الخيار C المثلث غير قائم الزاوية ومتطابق الضلعين،

ولكن مساحته تساوي $\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$ ولا تساوي 8 أو 10، لذا نستبعد الخيار C.

إذن الخيار الصحيح هو (D)، لأن فيه المثلث غير قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، ومساحته تساوي $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

10- اختارت أنثى الكنغر الصغيرة عدداً خاصاً. إذا طرحت $\frac{1}{10}$ من العدد أو إذا ضربت العدد في $\frac{1}{10}$ سوف تحصل على نفس النتيجة. ما هو العدد الذي اختارته في البداية؟

10. The little kangaroo has chosen a special number. She gets the same result when she subtracts $\frac{1}{10}$ from her number as she does when she multiplies it by $\frac{1}{10}$. What is her number?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{1}{9}$

الحل هو (E)

بفرض أن العدد هو x، إذن يمكننا تكوين المعادلة:

$$x-\frac{1}{10}=x\cdot\frac{1}{10}$$

$$10x-1=x$$

$$9x=1$$

$$x=\frac{1}{9}$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

مسائل الأربع نقاط — 4 points problems

11– لدى فهد 10 شمعات من نفس المقاس. أشعل الأولى وعندما أصبح طولها عُشر طولها الأصلي أشعل الثانية، وعندما أصبح طول الثانية عُشر طولها الأصلي أشعل الثالثة، واستمر هكذا. إذا كانت جميع الشمعات تحترق بنفس المعدل، والشمعة الواحدة تحترق تماماً خلال دقيقتين. كم من الوقت يلزم لاحتراق العشر شمعات كاملة؟

11. Fahd had 10 sparklers of the same size. He lit one first. When only a tenth of it remained, he lit the second one. When only a tenth of that remained, he lit the third one, and so on. Sparklers burn at the same speed along their entire length. One sparkler will burn in 2 minutes. How long did it take for all 10 sparklers to burn down?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
18 دقيقة 20 ثانية 18 min 20 sec	18 دقيقة 12 ثانية 18 min 12 sec	18 دقيقة 18 min	17 دقيقة 17 min	16 دقيقة 40 ثانية 16 min 40 sec

الحل هو (B)

كل شمعة تحترق خلال دقيقتين (أي 120 ثانية). هذا يعني لو أشعل فهد كل شمعة بشكل منفصل لكان الزمن الكلي لاحتراق جميع الشمعات يساوي $2\times10=20$ دقيقة. ولكن إشعال فهد للشمعة الثانية عندما أصبح طول الأولى عُشر طولها الأصلي، فإن ذلك يوفر زمنًا مقداره $\frac{1}{10}\times120=12$ ثانية من احتراق الأولى، وذلك لتداخله ضمن احتراق زمن الثانية. ولأنه فعل نفس الفعل تسع مرات (لأنه فعل ذلك مع كل الشمعات إلا العاشرة)، فقد وفر زمنًا من ال 20 دقيقة يساوي $12\times9=108$ ثانية، يساوي $108=60+48$ ثانية يساوي 1 دقيقة و 48 ثانية.

إذن الزمن الفعلي لاحتراق الشمعات بنمط فهد يساوي $20\,\text{min}-(1\,\text{min}\ \ 48\,\text{sec})=18\,\text{min}\ \ 12\,\text{sec}$.

12- يريد فيصل أن يصعد درجًا يتكون من 8 درجات. في كل خطوة يمكنه أن يصعد درجة واحدة أو درجتين. يوجد فجوة في الدرجة السادسة ولذلك لا يستطيع فيصل استخدام هذه الدرجة. كم عدد الطرق المختلفة التي يصعد بها فيصل للدرجة العلوية؟

12. Faisal walks up 8 steps going up either 1 or 2 steps at a time. There is a hole on the 6 th step, so he cannot use this step. In how many different ways can Faisal reach the top step?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
6	7	8	9	10

الحل هو (C)

يوجد طريقة واحدة من الدرجة الخامسة إلى الدرجة السابعة (خطوة واحدة بدرجتين).

كذلك طريقة واحدة من الدرجة السابعة إلى الدرجة الثامنة (خطوة واحدة بدرجة).

ولذلك سنركز على عدد الطرق من الدرجة الأولى إلى الدرجة الخامسة فقط.

الآن لدينا ثلاث حالات :

- الأولى: استخدام خطوة بدرجة في كل مرة .

يمكنه فعل ذلك بطريقة واحدة.

- الثانية: استخدام خطوة بدرجتين لمرة واحدة وخطوة بدرجة ثلاث مرات.

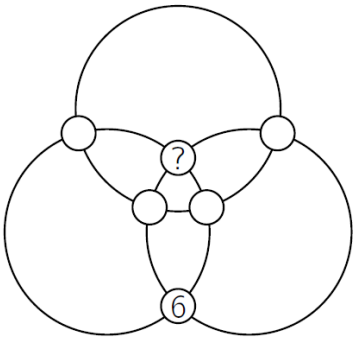
يمكنه فعل ذلك كالتالي: $(2,3,4,5),(1,3,4,5),(1,2,4,5),(1,2,3,5)$ **. عدد الطرق هو أربع طرق.**

- الثالثة : استخدام خطوة بدرجتين مرتين وخطوة بدرجة مرة واحدة.

يمكنه فعل ذلك كالتالي: $(2,3,5),(2,4,5),(1,3,5)$ **. عدد الطرق هو ثلاث طرق .**

إذن عدد الطرق المختلفة لصعود فيصل للدرجة العلوية يساوي $1+4+3=8$ **طرق.**

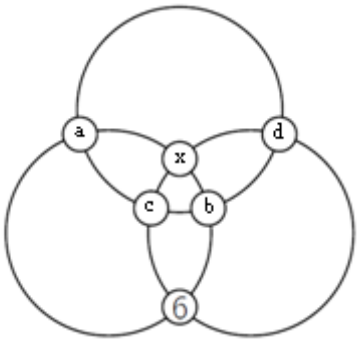
13- تم وضع الأعداد من 1 إلى 6 داخل الدوائر الصغيرة الموجودة عند تقاطع الحلقات الثلاث بحيث يتساوى مجموع الأعداد على كل حلقة. موضع العدد 6 موضح بالشكل. ما هو عدد الدائرة الصغيرة ذات علامة الاستفهام؟



13. The numbers from 1 to 6 are placed in the small circles at the intersections of three rings. The sums of the numbers on each ring are the same. The position of number 6 is shown. What number is placed in the small circle with the question mark?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	2	3	4	5

الحل هو (A)



لنفرض الأعداد كما بالشكل الموضح.

– من تساوي مجموع الأعداد على الحلقتين اليمنى واليسرى نجد: $a+x+b+6=6+c+x+d$ **، ومنها نجد**

$a+b=c+d$.

– من تساوي مجموع الأعداد على الحلقتين اليسرى والعليا نجد: $a+x+b+6=a+c+b+d$ **، ومنها نجد**

$x+6=c+d$.

إذن $a+b=c+d=x+6$.

ولكن $(a+b)+(c+d)+(x+6)=1+2+3+4+5+6=21$.

إذن $3(x+6)=21$ **، ومنها** $x+6=7$ **، ومنها** $x=1$ **وهو العدد المطلوب.**

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

14- باقي قسمة العدد 2021 إذا قسمناه على كل عدد من الأعداد 6 , 7 , 8 , 9 يساوي 5. كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 2021 والتي لها نفس هذه الخاصية؟

14. 2021 has a remainder of 5 when divided by 6, by 7, by 8, or by 9. How many positive integers, less than 2021, have this property?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4	3	2	1	لا شيء *none*

الحل هو (A)

ليكن N **هو أي عدد صحيح موجب أقل من** 2021 **باقي قسمته على كل عدد من الأعداد** 6 , 7 , 8 , 9 **يساوي** 5.

إذن العدد $N-5<2016$ **لابد أن يكون مضاعفًا مشتركًا للأعداد** $6,7,8,9$.

– عندما $N-5=0$ **، وهو مضاعف مشترك لتلك الأعداد، فإن** $N=5$.

– لدينا المضاعف المشترك الأصغر للأعداد $6,7,8,9$ **هو** 504**، ويجعل** $N=504+5=509$.

– أيضًا $504\times2=1008$ **مضاعف مشترك لتلك الأعداد، ويجعل** $N=1008+5=1013$.

– أيضًا $504\times3=1512$ **مضاعف مشترك لتلك الأعداد، ويجعل** $N=1512+5=1517$.

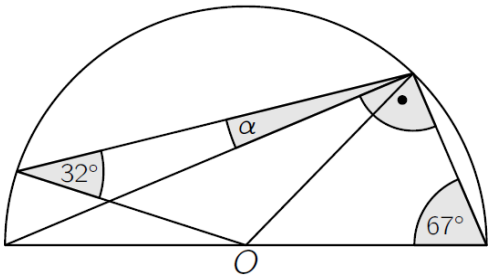
– لاحظ $504\times4=2016$ **مضاعف مشترك لتلك الأعداد ، وسيجعل** $N=2016+5=2021$ **مرفوض.**

وطبعًا نرفض المضاعفات الأكبر للعدد 504 **لأنها تجعل** $N>2021$.

إذن يوجد أربع قيم فقط للعدد N.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

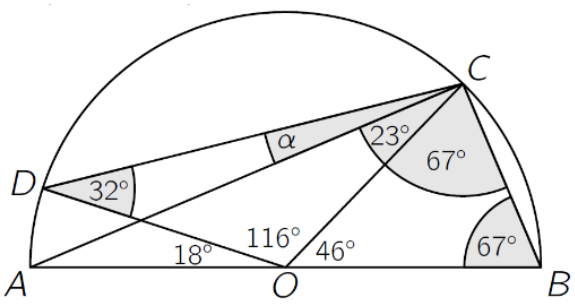
15- يوضح الشكل نصف دائرة مركزها النقطة O. لدينا زاويتان معلوم قياسيهما. ما قيمة الزاوية α بالدرجات؟



15. The figure shows a semicircle with center O. Two of the angles are given. What is the size, in degrees, of the angle α?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9°	11°	16°	17.5°	18°

الحل هو (A)



بما أن أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متطابقة ، إذن $OC = OB$.

إذن المثلث BOC متطابق الضلعين،

وبالتالي $m\angle OCB = m\angle OBC = 67^\circ$.

إذن $m\angle \text{BOC} = 180\text{-}(67+67) = 46^\circ$.

إذن $m\angle AOC = 180^\circ - 46^\circ = 134$.

بالمثل المثلث AOC متطابق الضلعين، فيه $OC = OA$ (نصفي قطري في الدائرة).

إذن $m\angle OCA = m\angle OAC = (180^\circ - 134^\circ) \div 2 = 23^\circ$.

لكن المثلث DOC متطابق الضلعين هو الآخر، فيه $OC = OD$ (نصفي قطري في الدائرة).

إذن $m\angle OCD = m\angle ODC = 32^\circ$.

إذن $\alpha = m\angle DCA = m\angle DCO - m\angle ACO = 32^\circ - 23^\circ = 9^\circ$.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

16– في مسابقة للفرق، يوجد خمسة فرق في انتظار بدء المنافسة. يتكون كل فريق إما من الأولاد فقط أو البنات فقط. عدد أعضاء الفرق دون ترتيب هو 9 و 15 و 17 و 19 و 21. وبعد أن بدأ جميع أعضاء الفريق الأول أصبح عدد البنات اللاتي لم يبدأن بعد يساوي ثلاثة أمثال عدد الأولاد الذين لم يبدأوا بعد. كم يبلغ عدد أعضاء الفريق الذي بدأ بالفعل؟

16. In a team competition, there are five teams waiting to start. Each team consists of either only boys or only girls. The number of team members are 9, 15, 17, 19 and 21. After all members of the first team have started, the number of girls not started yet is three times the number of boys not started yet. How many members are on the team that has already started?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	15	17	19	21

الحل هو (E)

عدد الأعضاء في كل الفرق يساوي $9+15+17+19+21=81$.

بمجرد بداية جميع أعضاء الفريق الأول يكون عدد البنات اللاتي لم يبدأن بعد يساوي ثلاثة أمثال عدد الأولاد الذين لم يبدأوا بعد. وهذا يعني أن ناتج طرح عدد أعضاء الفريق الأول من العدد الكلي للأعضاء لا بد أن يقبل القسمة على 4. ويتحقق ذلك فقط عندما عدد أعضاء الفريق الأول 9 أو 17 أو 21.

– عندما عدد أعضاء الفريق الأول 9: يجب أن يكون مجموع أعضاء الفرق الأربعة الأخرى هو $81-9=72$. يجب أن يكون عدد الأولاد هو 18 وعدد البنات 54. لا يوجد فريق أو أكثر عدد أعضاءهم الكلي 18. إذن الحالة مرفوضة.

– عندما عدد أعضاء الفريق الأول 17: يجب أن يكون مجموع أعضاء الفرق الأربعة الأخرى هو $81-17=64$. يجب أن يكون عدد الأولاد هو 16 وعدد البنات 48. لا يوجد فريق أو أكثر عدد أعضاءهم الكلي 16. إذن الحالة مرفوضة.

– عندما عدد أعضاء الفريق الأول 21: يجب أن يكون مجموع أعضاء الفرق الأربعة الأخرى هو $81-21=60$. يجب أن يكون عدد الأولاد هو 15 وعدد البنات 45. بالفعل يمكن أن يكون فريق الأولاد مكون من 15 عضوًا، وثلاثة فرق للبنات أعداد أعضاءها 9,19,17. إذن الحالة مقبولة.

17- شاركت خمس سيارات في سباق وكانت البداية كما موضح بالشكل.

وكلما تجاوزت سيارة سيارة أخرى تُمنح نقطة. إذا وصلت السيارات لخط النهاية بالترتيب الموضح في الشكل:

ما أصغر عدد من النقاط الكلية التي مُنحت لكل سيارات السباق؟

17. Five cars participated in a race, starting in the order shown.

Whenever a car overtook another car, a point was awarded. The cars reached the finish line in the following order:

What is the smallest number of points in total that could have been awarded?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
10	9	8	7	6

الحل هو (E)

أقل عدد من النقاط تحصل عليه كل سيارة لتصل للترتيب المذكور هو:

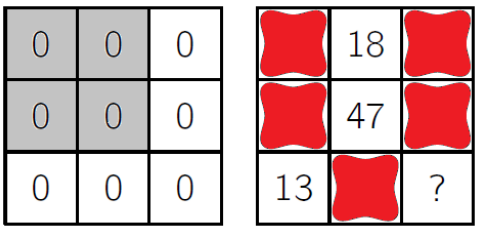
السيارة II **في المقدمة حصلت على (ثلاث نقاط) بتقدمها على السيارات** V , IV , III.

السيارة IV **حصلت على (نقطة واحدة) بتقدمها على السيارة** V

السيارة I **حصلت على (نقطتين) بتقدمها على السيارتين** V , III

أقل عدد من النقاط المكتسبة هو $3+1+2=6$.

18– لدينا مربع 3×3 تحوي كل خلية من خلاياه العدد صفر في البداية. في الخطوة الواحدة نختار مربع 2×2 (مثل المظلل في الشكل الأيسر) ونضيف 1 لكل عدد من أعداد خلاياه الأربع. ويتم تكرار هذه العملية عدة مرات إلى أن نحصل على النتيجة التي في الشكل الأيمن. لسوء الحظ بعض الأعداد في الشكل الأيمن غير ظاهرة. ما هو عدد الخلية ذات علامة الاستفهام؟



18. A 3×3 square initially has the number 0 in each of its cells. In one step all four numbers in one 2×2 subsquare such as the shaded one, for example, are then increased by 1. This operation is repeated several times to obtain the arrangement on the right. Unfortunately some numbers in this arrangement are hidden. What number is in the square with the question mark?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
14	15	16	17	19

الحل هو (C).

a	$a+b$	b
$a+c$	$a+b+c+d$	$b+d$
c	$c+d$	d

بفرض أنه تم اختيار المربع 2×2 الأيسر العلوي عدد a من المرات،

المربع 2×2 الأيمن العلوي عدد b من المرات،

المربع 2×2 الأيسر السفلي عدد c من المرات،

المربع 2×2 الأيمن السفلي عدد d من المرات.

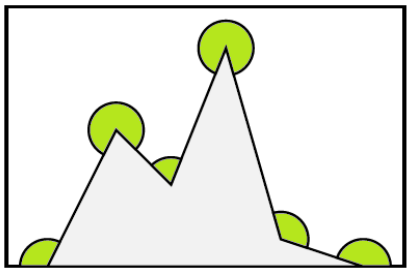
تصبح الأعداد في باقي الخلايا كما في الصورة الموضحة.

إذن العدد المفقود هو:

$$d=(a+b+c+d)-(a+b)-c=47-18-13=16.$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

19- في الشكل الموضح، ما مجموع الزوايا الست المحددة؟



19. What is the sum of the six marked angles in the picture?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
360°	900°	1080°	1120°	1440°

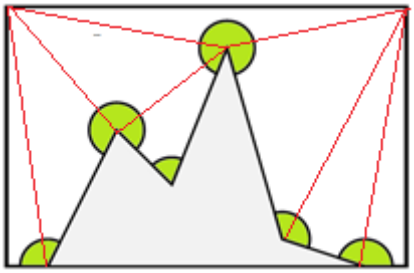
الحل هو (C)

مجموع الزوايا الست المشار إليها بالإضافة إلى زوايا المستطيل الأربعة يساوي مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عشاري.

مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عشاري $(10-2)\times 180=1440^\circ$.

أي أن مجموع الزوايا الست المشار إليها $1440-4(90)=1440-360=1080^\circ$.

حل آخر:

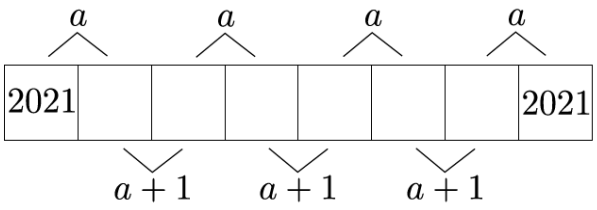


يمكنك بواسطة الخطوط الحمراء الموضحة الحصول على 8 **مثلثات غير متداخلة في الشكل، سيكون مجموع الزوايا المطلوبة يساوي مجموع زوايا المثلثات الثمانية مطروحًا منه مجموع الزوايا الأخرى (مجموعها يساوي مجموع أربع قوائم).**

إذن مجموع الزوايا المطلوبة يساوي $8(180^\circ)-4(90^\circ)=1440^\circ-360^\circ=1080^\circ$.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

20– في الشريط التالي يوجد 8 مربعات. مجموع العددين في كل مربعين متجاورين إما يساوي a أو يساوي $a+1$، العددان الموجودان في المربع الأول و المربع الثامن كلاهما 2021 . ما قيمة a؟



20. There are eight boxes in the strip shown. Numbers in adjacent boxes have sum a or $a+1$ as shown. The numbers in the first box and the eighth box are both 2021. What is the value of a?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4041	4042	4043	4044	4045

الحل هو (E).

معطى مجموع عددي المربعين الأول والثاني (من اليسار) يساوي a، وكذلك مجموع عددي المربعين الثالث والرابع، ومجموع عددي المربعين الخامس والسادس، ومجموع عددي المربعين السابع والثامن. إذن مجموع أعداد المربعات الثمانية يساوي $4a$.

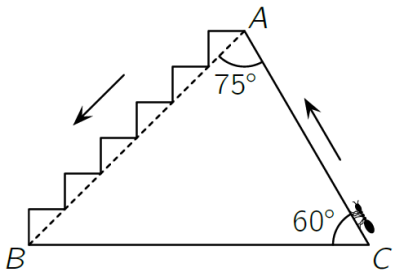
من جهة أخرى معطى أن كل من عددي المربعين الأول والثامن يساوي 2021، ومجموع عددي المربعين الثاني والثالث يساوي $a+1$، وكذلك مجموع عددي المربعين الرابع والخامس، ومجموع عددي المربعين السادس والسابع. إذن مجموع أعداد المربعات الثمانية يساوي $3(a+1)+2(2021)$.

الآن يمكننا تكوين المعادلة:

$$4a = 3(a+1)+2(2021) \Rightarrow$$
$$4a = 3a+3+4042 \Rightarrow$$
$$a = 4045$$

5 points problems — مسائل الخمس نقاط

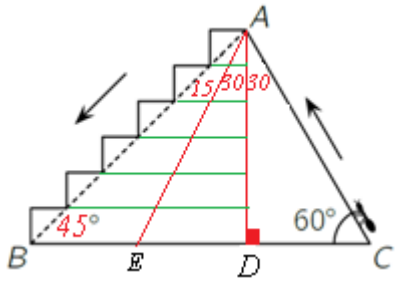
21- تتسلق نملة من C إلى A بالمشي على المسار CA ثم تنزل من A إلى B باستخدام الدرج كما موضح في الشكل.
ما النسبة بين طول مسار الصعود وطول مسار الهبوط؟



21. An ant climbs from C to A on path CA and descends from A to B on the stairs, as shown in the diagram. What is the ratio of the lengths of the ascending and descending paths?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

الحل هو (E)



نرسم $AD \perp BC$. باسقاط الخطوط الأفقية الخضراء الموضحة بالشكل تتكون عدة مستطيلات، ولأن كل ضلعين متقابلين في المستطيل متطابقان، يمكننا استنتاج أن مجموع المسارات الرأسية فقط على الدرج تساوي AD، وبالمثل يمكن استنتاج أن مجموع المسارات الأفقية في الدرج يساوي BD. إجمالًا طول المسار على الدرج (من A إلى B) يساوي $AD+BD$.

من المثلث ABC نجد $m\angle ABC = 180° - (60° + 75°) = 45°$.

من المثلث ABD نجد $m\angle BAD = 180° - (90° + 45°) = 45° = m\angle ABD$. إذن $AD = BD$.

الآن نستنتج أن طول المسار على الدرج (من A إلى B) يساوي $AD + BD = 2AD$.

أصبح المطلوب الآن حساب $\frac{AC}{2AD}$.

لإتمام ذلك نأخذ E على BD بحيث $m\angle EAC = 60°$. إذن من المثلث AEC نجد $m\angle AEC = 60°$،

ويصبح المثلث AEC متطابق الزوايا وبالتالي متطابق الأضلاع،

ومن تماثل ذلك المثلث حول AD نجد $ED = DC$.

دون فقدان للعمومية يمكننا أن نفرض $ED = DC = 1$ ، وبالتالي $EC = AC = 2$.

الآن نطبق نظرية فيثاغورس في المثلث ADC القائم في D، نجد :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 - DC^2 \\ &= 2^2 - 1^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

إذن $AD = \sqrt{3}$. وأخيرًا نصل للنسبة المطلوبة

$$\frac{AC}{2AD} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

22- إذا كانت الأعداد a,b,c **تحقق أن** $a+b+c=0$ ، $abc=78$. **فما قيمة المقدار** $(a+b)(b+c)(c+a)$ ؟

22. The numbers a,b and c satisfy $a+b+c=0$ and $abc=78$. What is the value of $(a+b)(b+c)(c+a)$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
-156	-39	78	156	**لا شيء مما سبق** none of the previous

الحل هو (E)

لدينا $a+b+c=0$. إذن يمكننا استنتاج التالي:

$$a+b=-c \quad , \quad a+c=-b \quad , \quad b+c=-a$$

ويتحول المطلوب إلى:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(-c)(-a)(-b)=-abc=-78$$

ولذلك لا يوجد خيار صحيح.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

23- إذا كان N هو أصغر عدد صحيح موجب مجموع أرقامه 2021 . فما مجموع أرقام العدد $N+2021$ ؟

23. Let N be the smallest positive integer whose sum of its digits is 2021. What is the sum of the digits of $N+2021$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
10	12	19	28	2021

الحل هو (A)

نعلم أن إذا كان هناك عددان أحدهما مكون من خانات أكثر من الآخر فإن العدد الأكبر الذي لديه عدد خانات أكثر يكون أكبر في القيمة، بغض النظر عن أرقام خانات العدد الآخر.

لذا حتى نحصل على العدد N وهو أصغر عدد صحيح موجب مجموع أرقامه 2021 ، لا بد ان نجعل عدد خاناته أقل ما يمكن.

وللوصول لذلك نجعل أرقام خاناته أكبر ما يمكن بأن نجعل أكبر قدر منها 9 . لدينا 2021 يساوي $224\times 9+5$.

الآن وصلنا لشكل العدد N ، أن يكون رقم خانة اليسار 5 ، وأرقام باقي الخانات 9 (لو كان رقم خانة اليسار 9 ، والرقم 5 في خانة أخرى ستزيد قيمة العدد N). إذن العدد N يكون على الصورة:

$$N=5\underbrace{99\ldots9}_{244time}$$

إذن

$$N+2021=N+1+2020=6\underbrace{00\ldots0}_{244time}+2020=6\underbrace{00\ldots0}_{240time}2020 .$$

ومنها مجموع أرقام العدد $N+2021$ هو مجموع أرقام الخانات الغير صفرية فيه يساوي

$$6+2+2=10$$

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

24– ثلاثة أولاد يلعبون لعبة (كلمات) وفيها يكتب كل ولد 10 كلمات. إذا كتب أحدهم كلمة لم يكتبها الأخرين يحصل على ثلاث نقاط، بينما يحصل على نقطة واحدة إذا كتب كلمة وكتبها ولد آخر فقط، ولا يحصل على أي نقطة إذا كتب كلمة وكتبها كل من الولدين الآخرين. وعند حساب عدد النقاط التي حصل عليها كل منهم تبين أن كل منهم قد حصل على عدد مختلف من النقاط. حصل سلطان على 19 نقطة وهو أقل عدد من النقاط أما عمر فحصل على أكبر عدد من النقاط. كم عدد النقاط التي حصل عليها عمر؟

24. Three boys played a "Word" game in which they each wrote down 10 words. Each boy scored three points if neither of the other boys had the same word. Each boy scored one point if only one of the other boys had the same word. No points were awarded for words which all three boys had. When they added up their scores, they found that they each had different score. Sultan had 19 points, which was the smallest score, and Omar had the highest score. How many points did Omar score?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
20	21	23	24	25

الحل هو (E)

– لو حصل سلطان على 3 نقاط في سبع جولات على الأقل فستكون عدد نقاطه 21 نقطة على الأقل . وهذا يناقض حصوله على 19 نقطة. إذن أقصى عدد لجولات حصل فيها سلطان على 3 نقاط هو ست جولات.

– من جهة أخرى لو حصل سلطان على 3 نقاط في أربع جولات، فسيتحصل منها على 12 نقطة. وتكون عدد النقاط الأخرى التي يمكنه الحصول عليها هو 6 نقاط على الأكثر (نقطة على الأكثر في كل جولة متبقية). بالتالي سيكون إجمالي عدد نقاطه هو 18 على الأكثر. وهذا يناقض حصوله على 19 نقطة.

وبملاحظة أن كل جولة للاعب تتحول من حصول على 3 نقاط إلى حصول على نقطة أو لاشيء، يقل معها إجمالي عدد نقاطه بمقدار نقطتين على الأقل. إذن لا يمكن لسلطان الحصول على 3 نقاط في أقل من أربع جولات.

إذن أقل عدد لجولات حصل فيها سلطان على 3 نقاط هو خمس جولات.

إذن ربما يكون سلطان قد حصل على 3 نقاط في ست أو خمس جولات، لندرس كل حالة:

• بفرض أن سلطان قد حصل على 3 نقاط في ست جولات. سيكون توزيع نقاطه كالتالي: $3\times(6)+1\times(1)+0\times(3)=19$. وهذا معناه أنه حصل على 0 في ثلاث جولات هو وكل من عمر ومحمد (اللاعب الثالث). سيكون أقصى عدد من النقاط لكل من اللاعبين الآخرين هو $3\times(7)=21$، ويجب أن يحصل عليه عمر بالقطع (لأنه أعلى لاعب حصل على نقاط).

إذن يجب أن يحصل محمد على 20 نقطة. وهذا العدد يستحيل الحصول عليه بهذا النظام من النقاط في سبع جولات.

إذن الحالة مرفوضة.

- بفرض أن سلطان قد حصل على 3 نقاط في خمس جولات. سيكون توزيع نقاطه كالتالي: $3\times(5)+1\times(4)+0\times(1)=19$.

وهذا معناه أنه حصل على 0 في جولة واحدة هو وكل من عمر ومحمد ، بينما الجولات الأربع التي حصل فيها على نقطة واحدة سيتقاسمها مع عمر و محمد. لو تقاسمها معهما بالتساوي، سينتج عن ذلك تساوي رصيد محمد وعمر من النقاط (مرفوض). إذن يجب يحصل عمر على نقطة واحدة في جولة واحدة أما محمد سيحصل على نقطة واحدة في ثلاث جولات منها (غير ذلك يكون رصيد محمد من النقاط أكبر من عمر).

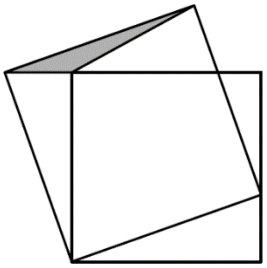
ويكون توزيع نقاط محمد :

$$3\times(6)+1\times(3)+0\times(1)=21$$

بينما نقاط عمر كالتالي:

$$3\times(8)+1\times(1)+0\times(1)=25$$

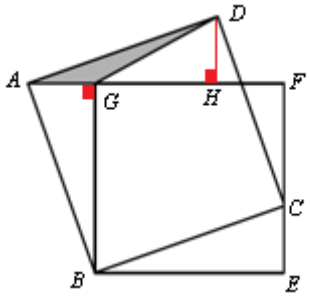
25- في الشكل الموضح مساحة المربع الأصغر تساوي $16\ cm^2$ و مساحة المثلث الرمادي تساوي $1\ cm^2$. ما مساحة المربع الكبير؟



25. The smaller square in the picture has area $16\ cm^2$ and the grey triangle has area $1\ cm^2$. What is the area of the larger square?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$17\ cm^2$	$18\ cm^2$	$19\ cm^2$	$20\ cm^2$	$21\ cm^2$

الحل هو (B)



لنرمز للنقاط في السؤال كما بالرسم، ونرسم DH عمودي على GF. طول ضلع المربع $BEFG$ (الصغير) يساوي $\sqrt{16}=4$، وبفرض طول ضلع المربع $ABCD$ (الكبير) يساوي a. لدينا $\angle DAH$ تتمم $\angle GAB$ (لأن $\angle BAD$ قائمة لأنها أحد زوايا مربع). من المثلث ABG القائم الزاوية في G نجد $\angle ABG$ تتمم $\angle GAB$.

إذن $m\angle DAH = m\angle ABG$. ولكن $m\angle DHA = m\angle AGB = 90°$، $DA = AB$ (ضلعان في مربع).

إذن المثلث DAH يطابق المثلث ABG (حالة SAA)، وينتج أن $DH = AG$، وكذلك $AH = BG = 4$.

إذن طول قاعدة المثلث الرمادي AG يساوي طول الارتفاع المناظر DH وكل منهما يساوي $\sqrt{2}$.

بتطبيق نظرية فيثاغورس في المثلث AGB القائم في G نحصل على:

$$AB^2 = AG^2 + GB^2 \Rightarrow a^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 4^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2 + 16 = 18$$

إذن مساحة المربع $ABCD$ (الكبير) تساوي $a^2 = 18$.

26– كل من العددين a,b هو مربع لعدد صحيح. إذا كان ناتج الطرح $a-b$ عدد أولي. أي مما يلي ممكن أن يكون قيمة للعدد b ؟

26. Each of the numbers a and b is a square of an integer. The difference $a-b$ is a prime number. Which of the following could be b ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
100	144	256	900	10000

الحل هو (D)

ليكن $b=n^2$, $a=m^2$ **حيث** m,n **عددان صحيحان موجبان،** $m>n$.

بما أن $m^2-n^2=(m+n)(m-n)=p$.

حيث p **عدد أولي. و هذا معناه** $m-n=1$ **، ومنها** $m=n+1$.

ويصبح $m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1=p$. **وبالتالي** $p=2n+1$.

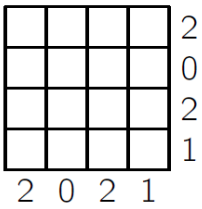
الآن نجرب الخيارات.

- **عند** $b=n^2=100$ **، فإن** $n=10$ **، ويصبح** $p=2n+1=21$ **مرفوض لأنه ليس أولي.**
- **عند** $b=n^2=144$ **، فإن** $n=12$ **، ويصبح** $p=2n+1=25$ **مرفوض لأنه ليس أولي.**
- **عند** $b=n^2=256$ **، فإن** $n=16$ **، ويصبح** $p=2n+1=33$ **مرفوض لأنه ليس أولي.**
- **عند** $b=n^2=900$ **، فإن** $n=30$ **، ويصبح** $p=2n+1=61$ **وهو عدد أولي. الحالة مقبولة.**

(لاحظ: عند $b=n^2=10000$ **، فإن** $n=100$ **، ويصبح** $p=2n+1=201$ **مرفوض لأنه ليس أولي).**

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

27– لدينا جدول 4×4 يجب طلاء بعض خلاياه باللون الأسود. الأعداد الموجودة بجانب الجدول أو أسفله (كما بالشكل) تمثل عدد الخلايا التي يجب طلاؤها باللون الأسود في الصف أو العمود. بكم طريقة يمكن طلاء هذا الجدول؟



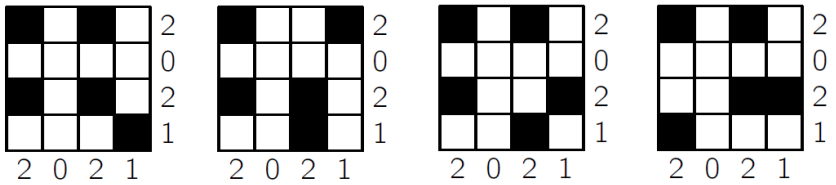
27. In the 4×4 table some cells must be painted black. The numbers next to and below the table show how many cells in that row or column must be black. In how many ways can this table be painted?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	2	3	5	أكثر من 5 *more than* 5

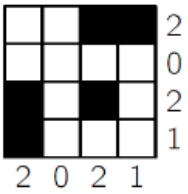
الحل هو (D)

توجد حالتان.

الحالة الأولى هي الركن العلوي الأيسر مظلل ويتم ذلك بأربع طرق وهي:



أما الحالة الثانية هي أن الركن العلوي الأيسر غير مظلل ويتم ذلك بطريقة واحدة وهي:



أي أن عدد الطرق هو 5.

28- كم عدد الأعداد الموجبة المكونة من خمسة أرقام والتي حاصل ضرب أرقامها يساوي 1000؟

28. How many five-digit positive numbers have the product of their digits equal to 1000?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
10	20	30	40	60

الحل هو (D)

نعلم أن $1000 = 2^3 \cdot 5^3$، وهذا معناه أن ثلاثة أرقام ستكون خمسات و يتبقى لنا رقمان حاصل ضربهم 8 .

لدينا حالتان :

– الحالة الأولى: أن تكون الأرقام 8 , 1 , 5 , 5 , 5 . ولإيجاد عدد كل الأعداد المكونة من هذه الأرقام، يكفي أن نعين عدد طرق وضع الرقمين 8 , 1 في الخانات، وتملأ الخمسات باقي الخانات. مثلًا الرقم 8 هناك 5 طرق مختلفة لوضعه في أحد الخانات، وبالتالي الرقم 1 سيكون هناك 4 طرق لوضعه في أحد الخانات (لأن هناك خانة بالفعل يشغلها الرقم 8).

وبالتالي عدد طرق وضع الرقمين يساوي $4 \times 5 = 20$ طريقة، وهو نفسه عدد الأعداد في هذه الحالة.

– الحالة الثانية: أن تكون الأرقام 4 , 2 , 5 , 5 , 5 . بطريقة مشابهة للحالة الأولى نجد عدد الأعداد يساوي 20 عددًا.

إذن إجمالي عدد الأعداد المطلوب هو $20 + 20 = 40$ عددًا.

@Mawhiba | Mawhiba.sa
موهبة.. حيث تنتمي.

29– لدى فدوى ثماني عملات معدنية وزنها بالجرام أعداد صحيحة موجبة مختلفة. عندما تضع فدوى أي عملتين في كفة ميزان ذي كفتين وأي عملتين في كفة الميزان الأخرى، تكون الكفة الأرجح هي التي تحتوي دوماً على أثقل العملات الأربع. ما أصغر قيمة لوزن أثقل عملة؟

29. Fadwa has eight coins whose weights in grams are different positive integers. When Fadwa puts any two coins on one side of a balance scales and any two on the other side of the balance scales, the side containing the heaviest of the four coins is always the heavier side. What is the smallest possible weight of the heaviest coin?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
8	12	34	128	256

الحل هو (C)

لتكن $a<b<c<d<e<f<g<h$ **هي أوزان العملات الثماني.**

بفرض أن $a=1$ **فإن** $c\geq 3$, $b\geq 2$.

بما أن $d+1>b+c$ **(لأن** d **هي الأثقل وتم مصاحبتها مع** $a=1$**). إذن** $d\geq b+c\geq 5$.

بالمثل $e+1>d+c$ **. ومنها** $e\geq d+c\geq 8$.

كذلك $f+1>d+e$ **. ومنها** $f\geq d+e\geq 13$.

وأيضًا $g+1>f+e$ **. ومنها** $g\geq f+e\geq 21$.

أيضًا $h+1>f+g$ **. ومنها** $h\geq f+g\geq 34$.

إذن أقل قيمة لوزن العملة الأكثر وزناً هي 34.

30– لدينا 2021 كرة مرتبة في صف واحد ومرقمة من 1 إلى 2021، كل كرة ملونة بأحد الألوان الأربعة: أخضر، أحمر، أصفر، أزرق. من بين أي خمس كرات متتالية يوجد كرة واحدة حمراء وكرة واحدة صفراء وكرة واحدة زرقاء. الكرة التالية لكل كرة حمراء يجب أن تكون صفراء. الكرات المرقمة 2، 20، 202 لونها أخضر. ما لون الكرة 2021؟

30. 2021 balls are arranged in a row and are numbered from 1 to 2021. Each ball is coloured in one of four colours: green, red, yellow or blue. Among any five consecutive balls there is exactly one red, one yellow and one blue ball. After any red ball the next ball is yellow. The balls numbered 2, 20 and 202 are green. What colour is the ball numbered 2021?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
خضراء Green	حمراء Red	صفراء Yellow	زرقاء Blue	لا يمكن تحديده It is impossible to determine.

الحل هو (D)

في أي ستة كرات متتالية فإن الكرات الخمس الأولى والكرات الخمس الأخيرة تحقق أن بها كرة حمراء وكرة صفراء وكرة زرقاء وكرتان لونهما أخضر، وهذا معناه أن الكرة الأولى والكرة السادسة لهما نفس اللون. وهذا معناه أن كل لون يتكرر بعد خمس كرات متتالية.

هذا يعني أن أي كرتين الفرق بين رقميهما يقبل القسمة على 5 تكونان من نفس اللون!

إذن الكرتان رقم 5 و رقم 20 تحملان اللون الأخضر. كذلك الكرتان رقم 2 و رقم 202 تحملان اللون الأخضر (لون الكرتان الثانية و الخامسة أخضر).

حتى نحقق شرط الكرة التالية للكرة الحمراء يجب أن تكون صفراء ، يجب أن تكون الكرة الثالثة حمراء والكرة الرابعة صفراء، وبالتالي الكرة الأولى زرقاء. أي أن الكرة رقم 2021 زرقاء.