الحلول الكاملة لكتيب ثاني وثالث ثانوي 2024

11-12 Student 2024

إخراج اللجنة العلمية

أ مها الداوود   أ عبد الوهاب الشيخ

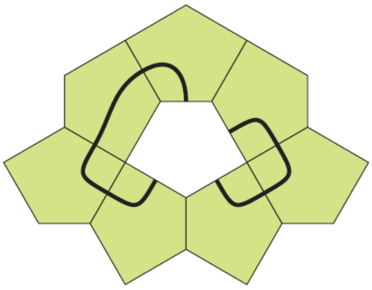
أ طارق محمد فضل

إشراف

أ صفوت الطناني

3 points problems	مسائل الثلاث نقاط

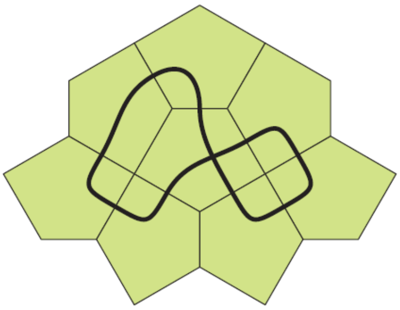
1– نمط مكون من مضلعات خماسية متطابقة. أي من البلاطات أدناه عند وضعها في الثقب (الفراغ) المركزي تتشكل حلقة متقاطعة ذاتيًا (مع نفسها)؟



1- A pattern is made of congruent pentagons. Which of the tiles below, when placed in the central hole, will form a self-intersecting loop?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
				

الحل هو (C)



لاحظ أن الفراغ يحتوي على بلاطة خماسية بها زاويتين قائمتين.

والخيارات كلها بلاطات تحتاج تدويرها بزاوية 180°.

لا يمكن لأي دوران آخر أن يجعل التبليط مناسبًا.

Note that all tiles are rotated by 180°. No other rotation can make the tile fit as the pentagonal tile has exactly two right angles.

2– أي الأعداد الصحيحة التالية يكون أقل من أحد مضاعفات العدد 10 بمقدار 2 ، وأكبر من عدد مربع بمقدار 2 ، ويساوي ضعف عدد أولي؟

2. Which of these integers is two less than a multiple of ten, two more than a square number, and two times a prime?

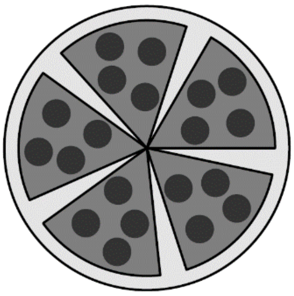
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
78	58	38	18	6

الحل هو (C)

لأن جميع الخيارات أقل من أحد مضاعفات العدد 10 بمقدار 2 ما عدا E ، بينما كل من 38 و 18 أكبر من عدد مربع $(36 ، 16)$ بمقدار 2 ، لكن فقط 38 يساوي ضعف عدد أولي (2×19) لذلك 38 هي الخيار الصحيح.

All the given options but (E) are two less than a multiple of ten. However, both 38 and 18 are two more than a square (36 and 16) but only 38 is two times a prime (2×19). Hence the answer is 38.

3– قطع صغير الكنغر فطيرة بيتزا إلى 6 شرائح متساوية. وبعد أن أكل شريحة واحدة منها، رتب الشرائح المتبقية بحيث تكون الفراغات بينها متساوية. ما قياس الزاوية بين كل شريحتين متجاورتين؟



3. A young kangaroo cut a pizza into six equal slices. After eating one slice, he arranged the remaining slices with equal gaps between slices. What size is the angle of each gap?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
5°	8°	9°	10°	12°

الحل هو (E)

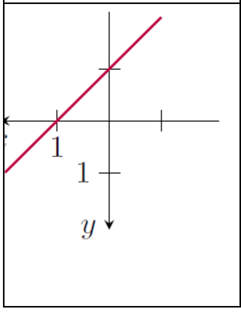
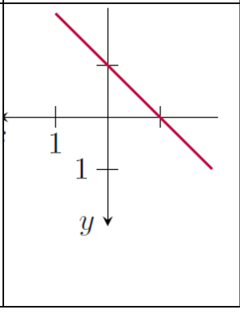
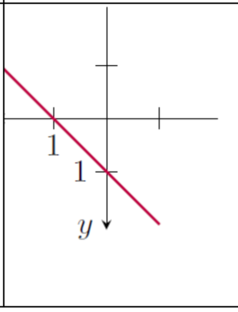
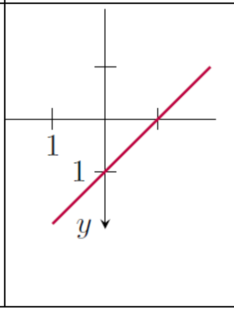
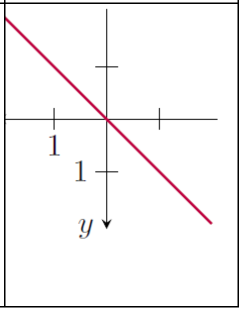
قياس الزاوية المركزية لكل شريحة $= \frac{360}{6} = 60^\circ$. مجموع قياسات الزوايا بين كل شريحتين متجاورتين $= 60^\circ$.

قياس الزاوية بين كل شريحتين متجاورتين $= \frac{60}{5} = 12^\circ$.

The sum of the angles of all 5 gaps is $= \frac{360}{6} = 60^\circ$. Hence, the angle of each gap is $= \frac{60}{5} = 12^\circ$.

4- اعتادت جودي على عادة غريبة، تتمثل في رسم المستوى الإحداثي بحيث يشير الجزء الموجب من محور السينات إلى اليسار ويشير الجزء الموجب من محور الصادات إلى الأسفل. أي التمثيلات البيانية التالية هو التمثيل البياني للمعادلة $y = x + 1$ على المستوى الإحداثي الذي رسمته جودي؟

4. Judy has an unusual habit of drawing the xy-plane with the positive coordinate axes pointing left and down. What would the graph of the equation $y = x + 1$ look like in a coordinate system drawn by Judy?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
				

الحل هو (D)

التمثيل البياني للمعادلة يجب أن يمر بالمقطع الصادي 1 و المقطع السيني -1 .

The graph should pass the y-coordinate at 1 and y should increase as the x-coordinate increases, so the correct answer is (D).

5– لدى عمر مكعب مرقم بالأرقام $1,2,3,4,5,6$. إذا كان احتمال ظهور أي عدد من الأعداد التالية $5,4,3,2$ يساوي $\frac{1}{6}$ ، وكان احتمال ظهور العدد 6 ضعف احتمال ظهور العدد 1 . ما احتمال ظهور العدد 6؟

5. Omar has a cube numbered $1,2,3,4,5,6$. The probabilities of rolling a $2,3,4$ or 5 are still $\frac{1}{6}$ each, but the probability of rolling a 6 is twice the probability of rolling a 1. What is the probability of rolling a 6?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{18}$

الحل هو (D)

واضح من المعطيات أن $P(1)+P(6)=1-4\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

و لكن $P(6)=2\times P(1)$

$$P(6)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times P(6)$$

$$\frac{3}{2}P(6)=\frac{1}{3}$$

$$P(6)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

We have $P(1)+P(6)=1-4\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

and $P(6)=2\times P(1)$. So we get $P(6)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times P(6)$

$$\frac{3}{2}P(6)=\frac{1}{3}$$

$$P(6)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

6- أي العبارات أدناه لها نفس قيمة العبارة $16^{15}+16^{15}+16^{15}+16^{15}$ ؟

6. Which of the expressions below has the same value as:
$?16^{15}+16^{15}+16^{15}+16^{15}$

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
16^{19}	4^{31}	4^{60}	16^{60}	4^{122}

الحل هو (B)

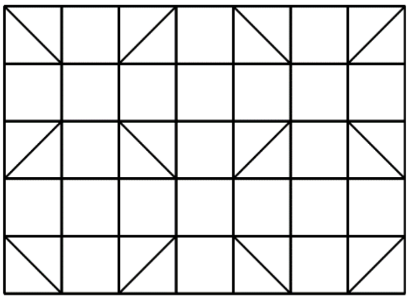
نعلم أن $16=4^2$

$$\begin{aligned}16^{15}+16^{15}+16^{15}+16^{15} &= 4\times16^{15}\\ &= 4\times\left(4^2\right)^{15}\\ &= 4\times4^{30}\\ &= 4^{31}\end{aligned}$$

Notice that $16=4^2$ and write the expression as follows:

$$\begin{aligned}16^{15}+16^{15}+16^{15}+16^{15} &= 4\times16^{15}\\ &= 4\times\left(4^2\right)^{15}\\ &= 4\times4^{30}\\ &= 4^{31}\end{aligned}$$

7– ترغب هبة الله في تلوين المربعات والمثلثات في الشكل التالي بحيث لا يوجد شكلان متجاوران لهما نفس اللون، الشكلان المشتركان في رأس واحد أو في ضلع واحد متجاوران. ما أقل عدد من الألوان التي تحتاجها؟

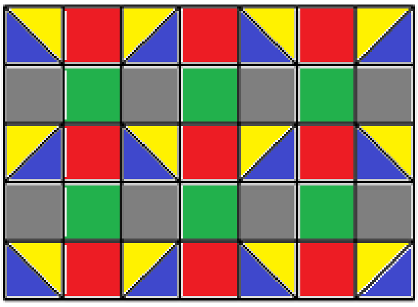


7. Hebatallah wishes to color the squares and triangles of the following figure so that no two neighbouring figures, even those sharing a single vertex, are the same color. What is the least number of colors needed?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
3	4	5	6	7

الحل هو (C)

توجد عدة نقاط تتلاقى عندها 5 أشكال. لذلك نحتاج على الأقل 5 ألوان و نلاحظ أن 5 ألوان كافية كما بالشكل التالي:



There are points where five figures meet, so at least five colours are needed. Five is also enough, as seen in this figure.

8– توجد على طاولة 6 كاسات مفتوحة لأعلى. في أي حركة واحدة نستطيع أن نعكس اتجاه 4 منها بالضبط. ما أقل عدد من الحركات التي نحتاجها لتكون جميع الكاسات مفتوحة لأسفل؟

8. There are 6 glasses on a table with their open ends up. In any one move, we turn over exactly 4 of them. What is the least number of moves required to have all glasses upside down?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2	3	4	5	6

الحل هو (B)

بعد الخطوة الأولى، سيكون لدينا نظارات 4 كاسات للأسفل و 2 للأعلى **.لا توجد حركة ثانية من شأنها أن تخفض** كل الكاسات. ومع ذلك، يمكننا تحويل 1 كأس لأعلى و 3 لأسفل **D(DDDU)U** إلى 1 كأس للأسفل 3 للأعلى **D(UUUD)U** . مما يترك 4 كاسات متجهة للأعلى والتي يمكننا قلبها في الخطوة الثالثة.

Whatever the first move, we will have 4 glasses down and up. There is no 2nd move which will have all the glasses down. However we can move D(DDDU)U to D(UUUD)U which leaves 4 glasses pointing up which we can turn over in the third move. Hence the answer is 3 .

9– بدأ سلمان بالعدد 1 ثم قام بضربه في 6 أو في 10 . ثم ضرب الناتج في 6 أو في 10 . و استمر في إجراء ذلك مرات عديدة. أي مما يلي لا يمكن أن يكون أحد النتائج التي حصل عليها؟

9. Salman started with the number 1 and multiplied it by either 6 or 10. He then multiplied the result by either 6 or 10, and continued this procedure many times. Which of the following *cannot be one* of the numbers he obtained?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$2^{100}\cdot 3^{20}\cdot 5^{80}$	$2^{90}\cdot 3^{20}\cdot 5^{80}$	$2^{90}\cdot 3^{20}\cdot 5^{70}$	$2^{110}\cdot 3^{80}\cdot 5^{30}$	$2^{50}\cdot 5^{50}$

الحل هو (B)

إذا استخدمنا العدد 6 في الضرب عدد N من المرات، وإذا استخدمنا العدد 10 في الضرب عدد M من المرات، العدد الذي سنحصل عليه في النهاية هو:

$$(2\times 3)^{N}\times(2\times 5)^{M}\quad =2^{N}\times 3^{N}\times 2^{M}\times 5^{M}\quad =2^{N+M}\times 3^{N}\times 5^{M}$$

وسنلاحظ أن قوة العدد 2 تساوي مجموع قوة العدد 3 و قوة العدد 5،

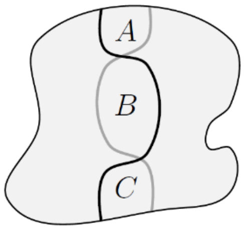
وهذا يتحقق في جميع الخيارات ماعدا الخيار (B).

If he used the factor 6 N times and the factor 10 M times, the number he would get is of the form:

$$(2\times 3)^{N}\times(2\times 5)^{M}\quad =2^{N}\times 3^{N}\times 2^{M}\times 5^{M}\quad =2^{N+M}\times 3^{N}\times 5^{M}\ .$$

Observe that the exponent of 2 is equal to the sum of the exponents of 3 and of 5. Of the numbers given the only one that fails this is (B), as $90\neq 80+20$.

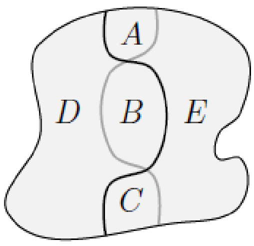
10– ممران أحدهما أسود والآخر رمادي يصلان بين طرفي حديقة، كما هو موضح. كل منهما يقسم الحديقة إلى قسمين متساويين في المساحة. أي مما يلي يجب أن يكون صحيحا عن المساحات A، B، C؟



10. A black trail and a grey trail cross a park, as shown. Each trail divides the park into two regions of equal area. Which of the following must be true about the areas A , B and C ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$A=C$	$B=A+C$	$B=\frac{1}{2}(A+C)$	$B=\frac{2}{3}(A+C)$	$B=\frac{3}{5}(A+C)$

الحل هو (B)



نعلم أن مساحة المنطقة على جانبي كل ممر يساوي نصف مساحة الحديقة.

مساحة المنطقة على يسار الممر الأسود $=D+B$.

مساحة المنطقة على يسار الممر الرمادي $=D+A+C$.

أي أن $D+B=D+A+C$ ومنها $B=A+C$.

To the left of the black trail, we have $D+B$ is half the park. To the left of the grey trail, we have $D+A+C$ is half the park. Equating these, we see that $B=A+C$.

4 points problems مسائل الأربع نقاط

11– توجد عبارة واحدة فقط صحيحة من العبارات التالية عن عدد صحيح موجب n. أي عبارة هي الصحيحة؟

11. Exactly one of these statements about a certain positive integer n is true. Which statement is true?

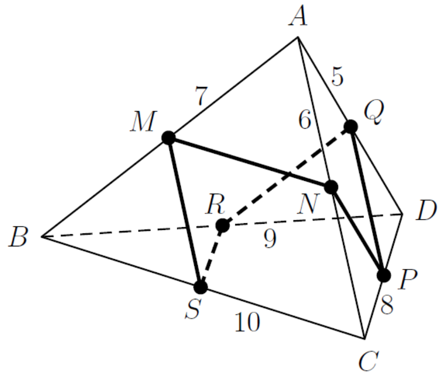
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
n is divisible by 3 n يقبل القسمة على 3	n is divisible by 6 n يقبل القسمة على 6	n is odd n عدد فردي	$n=2$ $n=2$	n is a prime n عدد أولي

الحل هو (C)

الخيار D لا يمكن أن يكون هو الصحيح، لأنه إذا كان صحيحًا سيكون في هذه الحالة الخيار E صحيحًا أيضًا. الخيار B لا يمكن أن يكون هو الصحيح لأنه إذا كان صحيحًا سيكون في هذه الحالة الخيار A صحيحًا أيضًا. ولأن العدد n ليس 2 لذلك الخيار E لا يمكن أن يكون هو الصحيح لأنه إذا كان صحيحًا سيكون في هذه الحالة الخيار C صحيح أيضًا. لذلك الحل الصحيح قد يكون A أو C. إذا كان A هو الصحيح فإن C تكون خطأ وعلى ذلك تكون B صحيحة، هذا تناقض لأنه توجد عبارة واحدة صحيحة فقط. مما سبق نستنتج أن C هي الإجابة الصحيحة.

D cannot be true since E would also be true. B cannot be true because A would also be true. Since n is not 2, if E were true, C would also be true, so E cannot be true. The true statement is either A or C. If A is true, then C is not, but then B would be true. So A cannot be true either, and the answer must be C. The number n must be some odd number that is not divisible by 3 nor is it prime, for example $n=25$.

12- $ABCD$ هرم ثلاثي أطوال أحرفه 10 , 9 , 8 , 7 , 6 , 5. النقاط S , R , Q , P , N , M هي منتصفات الأحرف كما هو موضح بالشكل. ما طول الخط السداسي المغلق $MNPQRSM$؟



12. A triangular pyramid $ABCD$ has sides of length $5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ and 10. The points M, N, P, Q, R and S are the midpoints of the edges of the pyramid, as shown. What is the perimeter of the closed hexagonal line $MNPQRSM$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
19	20	21	22	23

الحل هو (C)

من هندسة الشكل نجد أن

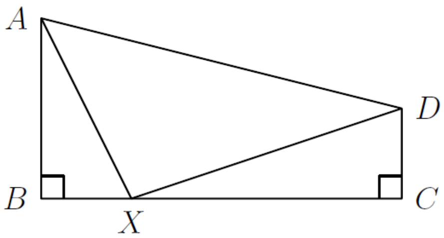
$$MN=\frac{1}{2}BC\ ,\ NP=\frac{1}{2}AD\ ,\ PQ=\frac{1}{2}AC\ ,\ QR=\frac{1}{2}AB\ ,\ RS=\frac{1}{2}DC\ ,\ SM=\frac{1}{2}AC$$

طول الخط السداسي المغلق $MNPQRSM$

$$\frac{1}{2}(10+5+6+7+8+6)=21$$

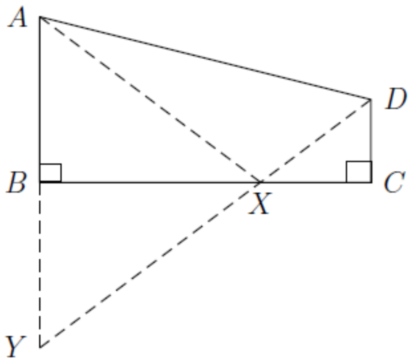
MN is half of BC. In fact each side of the closed hexagonal line is half a corresponding parallel edge. So the perimeter of the hexagon (starting from the segment MN) is $\frac{1}{2}(10+5+6+7+8+6)=21$

13- $ABCD$ شكل رباعي به زاويتان قائمتان عند B و C بحيث $AB = 4, BC = 8, CD = 2$.
النقطة X تقع على BC. ما أصغر قيمة للمقدار $AX + DX$؟



13. A quadrilateral $ABCD$ has two right angles at B and C, where $AB = 4, BC = 8$ and $CD = 2$. Point X lies on BC. What is the minimum value of $AX + DX$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$9\sqrt{2}$	12	13	10	لا شيء مما سبق *none of the previous*



الحل هو (D)

نرسم امتداد كل من $\overrightarrow{DX}$, $\overrightarrow{AB}$ ليتقاطعا في نقطة Y،

بحيث $AB = BY$ نجد أن $AX = XY$.

أصغر قيمة للمقدار $AX + DX$ هي YD.

$$\sqrt{BC^2 + (CD + BY)^2} = \sqrt{8^2 + (2+4)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

If we extend the line $\overrightarrow{AB}$ to the point Y, where $AB = BY$, connect YD which crosses the side BC at point X, then connect AX. From the graph, we know that $AX = XY$, the minimum value of $AX = XY$ is YD.

$$YD = \sqrt{BC^2 + (CD + BY)^2} = \sqrt{8^2 + (2+4)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

14– لدى حمزة عدد من مكعبات الوحدة الملونة باللون الأبيض بالكامل أو الأسود بالكامل، ويريد إنشاء مكعب $3\times3\times3$ باستخدام 27 مكعبًا منها. هو يريد أن يكون السطح الخارجي نصفه أبيض ونصفه أسود بالضبط. ما أصغر عدد من المكعبات السوداء التي يمكنه استخدامها؟

14. Hamza has a number of all black or all white unit cubes and wants to build a $3\times3\times3$ cube using 27 of them. He wants the surface to be exactly half black and half white. What is the smallest number of black cubes he can use?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
14	13	12ال	11	لا شيء مما سبق *none of the previous*

الحل هو (E)

المكعب الكبير له 6 أوجه مربعة، يحتوي كل منها على 9 مربعات صغيرة وهذا يعني $9\times6=54$ مربعًا صغيرًا، 27 أبيض و 27 أسود.

كل مكعب صغير يوضع في ركن المكعب الكبير ستظهر منه **3** أوجه، وكل مكعب صغير يوضع في حافة المكعب الكبير (بخلاف الأركان) سيظهر منه وجهان، وعند وضع المكعب الصغير في وسط المكعب الكبير سيظهر منه وجه واحد، أما المكعب المخفي في مركز المكعب الكبير فلا يظهر منه أي وجه.

المكعب له 8 رؤوس. إذا وضع حمزة 8 مكعبات سوداء عند الرؤوس، يكون لدينا $3\times8=24$ مربع أسود صغير. ويضع مكعب أسود في أحد الحروف بين وجهين فقط، وبذلك يضاف مربعان أسودان صغيران، ويضع مكعب في مركز أحد الأوجه الستة. فيكون إجمالي عدد المربعات السوداء الصغيرة:

$$24+2+1=27$$

مما سبق نجد أن أصغر عدد من المكعبات السوداء التي يمكنه استخدامها هو 10 وهو ليس موجود ضمن الخيارات.

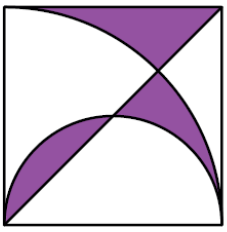
None of the numbers in the answers. In fact the smallest number is 10. There are 9 small squares showing on each of the 6 faces of the large cube, for a total of 54. In order for 27 of these to be black.
Each small cube placed in the corner of the large cube will have 3 faces visible, each small cube placed on the edge of the large cube (other than the corners) will have 2 faces visible, and when the small cube is placed in the middle of the large cube, one face will be visible, while the hidden cube in the center of the large cube will not have any faces visible.
He can put a black cube in each of the 8 corners ($8\times3=24$ small black

squares) and one each in a central edge spot (2 black squares) and a central face spot (one black square). The total number of small black squares is:

$$24+2+1=27$$

From the above, we find that the smallest number of black cubes he can use is 10 and it is not among the options.

15. مربع طول ضلعه $6\ cm$ مرسوم بداخله قطر ونصف دائرة وربع دائرة. ما مساحة الجزء المظلل بوحدة السنتيمتر المربع؟



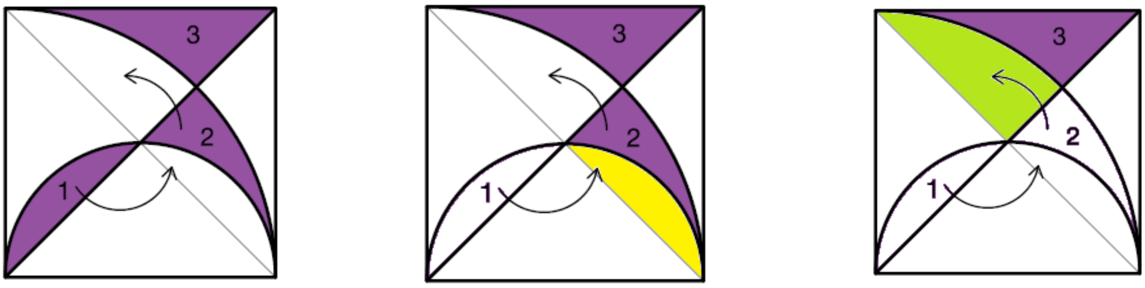
15. A diagonal, a semicircle and a quadrant of a circle are drawn in a square of side $6\ cm$. What is the area, in cm^2, of the shaded part ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	3π	$6\pi-9$	$\frac{10\pi}{3}$	12

الحل هو (A)

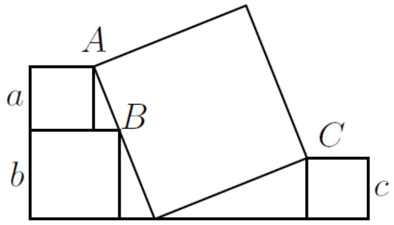
نرسم قطر المربع الآخر. من هندسة الشكل نجد أن مجموع المساحات $1,2,3$ يكون مساويًا ربع المربع.

مساحة الجزء المظلل: $\frac{6^2}{4}=\frac{36}{4}=9$.



Notice that part 1 coincides with the same part on the right. Combining of 1 and 2 coincides with the same part on the top. Thus all painted part coincides with the quarter of the square area. Then its area $=\frac{6^2}{4}=\frac{36}{4}=9$.

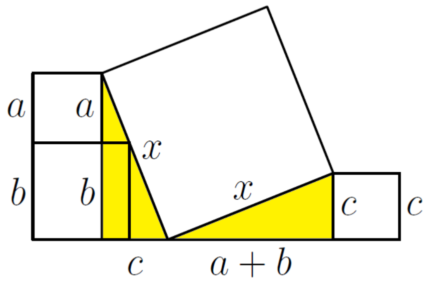
16. الشكل التالي يوضح أربعة مربعات، أطوال أضلاع المربعات الثلاثة الأصغر هي c , b , a. الرأسان C , A هما رأسان لأصغر مربعين وهما رأسان متقابلان للمربع الكبير. الرأس B رأس في المربع الثالث وتقع على أحد أضلاع المربع الكبير. أي العبارات التالية تمثل طول ضلع المربع الكبير؟



16. The figure shows four squares. The smaller ones have side lengths a , b and c . The vertices A and C of two of the smaller squares coincide with two diagonally opposite vertices of the large square. The vertex B of the third small square is on the side of the large one. Which of the following expressions represents the side length of the largest square?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{2}(a+b+c)$	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	$\sqrt{(a+b)^2+c^2}$	$\sqrt{(b-a)^2+c^2}$	$\sqrt{a^2+ab+b^2+c^2}$

الحل هو (C)



من هندسة الشكل نلاحظ أن المثلثين المظللين القائمي الزاوية متطابقان، لأن زواياهما المتناظرة متطابقة و ووترهما متطابقان.

من نظرية فيثاغورس نجد أن

$$x^2=(a+b)^2+c^2 \Rightarrow x=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$$

It is easy to see that the two shaded right angled triangles are equal (hypotenuses equal and one acute angle equal). Then by Pythagoras on one of them we get

$$x^2=(a+b)^2+c^2 \Rightarrow x=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$$

17– لدينا العددان q , p بحيث $q < p$. أي المقادير التالية هو الأكبر؟

17 . We have two positive numbers p and q , with $p < q$. Which of these expressions is the largest?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{p+3q}{4}$	$\frac{p+2q}{3}$	$\frac{p+q}{2}$	$\frac{2p+q}{3}$	$\frac{3p+q}{4}$

الحل هو (A)

إذا كتبنا المقادير جميعها بعد توحيد المقامات لتصبح كلها 12 :

$\frac{3p+9q}{12}, \frac{4p+8q}{12}, \frac{6p+6q}{12}, \frac{8p+4q}{12}, \frac{9p+3q}{12}$.

نلاحظ أن مجموع معاملات q , p متساوية، ولكن $q < p$ ، لذلك المقدار الأكبر هي التي يكون معامل q فيها أكبر ما يمكن وهي $\frac{p+3q}{4} = \frac{3p+9q}{12}$.

First write all the options as expressions with a common denominator of 12 to give $\frac{3p+9q}{12}, \frac{4p+8q}{12}, \frac{6p+6q}{12}, \frac{8p+4q}{12}, \frac{9p+3q}{12}$. Since we are told that $p < q$ and the sum of the coefficients of p and q in each expression is the same, the largest expression is the one with the largest coefficient of q .

Therefore the largest expression is $\frac{3p+9q}{12} = \frac{p+3q}{4}$.

Alternatively, we can observe that each of the expressions is a weighted average of p , q . As $p < q$, the expression with the greatest proportion of q will be the largest, which is (A).

18– كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل والتي تحتوي على الأعداد 1 أو 2 أو 3 مرة على الأقل؟

18. How many three-digit numbers are there that contain at least one of the digits 1 or 2 or 3?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
27	147	441	557	606

الحل هو (E)

عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل هو $900 = 10\times10\times9$. عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل والتي ليس بها 1 أو 2 أو 3 هو $294 = 7\times7\times6$. فلذلك عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل والتي تحتوي على الأعداد 1 أو 2 أو 3 مرة على الأقل $900-294=606$.

There are 900 three-digit numbers in total. Let's calculate how many of them do not contain 1, 2 or 3 . The first digit of such a number could be $4,5,6,7,8$ or 9, giving 6 options. For each of the second and third digits, there are 7 options. So there are $6\times7\times7=294$ numbers. Therefore there are $900-294=606$ numbers that contain at least one of digits 1, 2 or 3 .

19. كتبتُ عددًا غير الصفر مكون من أربعة منازل $N = \overline{pqrs}$. عندما أضع فاصلة عشرية بين q و r، أجد أن العدد الناتج $\overline{pq.rs}$ هو المتوسط الحسابي للعددين المكونين من منزلتين $\overline{pq}$ و $\overline{rs}$. ما مجموع منازل العدد N؟

19. I write down a 4-digit non-zero number $N = \overline{pqrs}$. When I place a decimal point between the q and the r, I find that the resulting number $\overline{pq \cdot rs}$ is the average of the two-digit numbers $\overline{pq}$ and $\overline{rs}$. What is the sum of the digits of N?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
14	18	21	25	27

الحل هو (B)

لدينا:

$$pq.rs = \frac{pq + rs}{2}$$

أي:

$$pq + \frac{rs}{100} = \frac{pq + rs}{2}$$

نضرب في 200 نحصل على

$$200pq + 2rs = 100pq + 100rs$$

$$100pq = 98rs$$

بالقسمة على 2:

$$50pq = 49rs$$

بما أن pq و rs عددان مكونان من رقمين (من 10 إلى 99)، ولأن 50,49 أوليان نسبيًا (القاسم المشترك الأكبر لهما 1)، إذن الحل الوحيد للمعادلة $rs = 50$، كذلك $pq = 49$.

ومن ثم $N = \overline{pqrs} = 4950$ وبالتالي مجوع الأرقام هو

$$4 + 9 + 5 + 0 = 18$$

____

We are given:

$$pq.rs = \frac{pq + rs}{2}$$

That is,

$$pq + \frac{rs}{100} = \frac{pq + rs}{2}$$

Multiplying both sides by 200:

$$200pq + 2rs = 100pq + 100rs$$

Simplifying:

$$100pq = 98rs$$

Dividing both sides by 2:

$$50pq = 49rs$$

Since $pq$and $rs$are two-digit integers (from 10 to 99), and since 50 and 49 are relatively prime (their greatest common divisor is 1), then the only possible solution to the equation is $rs = 50$, and therefore $pq = 49$.
Therefore $N = \overline{pqrs} = 4950$, the sum of the numbers is

$$4 + 9 + 5 + 0 = 18.$$

20. أشعلنا شمعتين لهما الطول نفسه في الوقت نفسه. وكل منها تحترق بمعدل ثابت خاص بها. إذا كانت إحداهما تحترق تمامًا خلال 4 ساعات والأخرى تحترق تمامًا خلال 5 ساعات. بعد كم ساعة من بدء احتراقهما يصبح طول إحداهما ثلاثة أمثال طول الأخرى؟

20. Two candles of equal length start burning at the same time. One of the candles will burn down in 4 hours, the other in 5 hours, each at their own constant rate. How many hours will they have to burn before one candle is 3 times the length of mthe other?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{40}{11}$	$\frac{45}{12}$	$\frac{63}{20}$	3	$\frac{47}{14}$

الحل هو (A)

الشمعة الأولى تحترق تمامًا خلال 4 ساعات بينما الشمعة الثانية تحترق تمامًا خلال 5 ساعات. الشمعة الأولى تحترق أسرع من الشمعة الثانية. نفرض أن طول كلا من الشمعتين هو x و أن t عدد الساعات اللازمة كي يصبح طول الشمعة الثانية ثلاثة أمثال طول الشمعة الأولى.

في الساعة الواحدة الشمعة الأولى يحترق ربعها و الشمعة الثانية يحترق خمسها.

بعد t من الساعات الشمعة الأولى يكون طولها $\left(1-\frac{t}{4}\right)x$ و الشمعة الثانية يكون طولها $\left(1-\frac{t}{5}\right)x$.

$$\left(1-\frac{t}{5}\right)x = 3\left(1-\frac{t}{4}\right)x \Rightarrow \left(\frac{5}{5}-\frac{t}{5}\right) = 3\left(\frac{4}{4}-\frac{t}{4}\right)$$

$$20-4t = 60-15t$$

$$11t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{11}$$

Let the initial length of each candle be x . Let candle $\mathbf{A}$ be the faster burning candle, completely burning in 4 hours, and let $\mathbf{B}$ be the slower burning candle. After t hours the lengths of the candles are $\mathbf{A}:\left(1-\frac{t}{4}\right)x$ $\mathbf{B}:\left(1-\frac{t}{5}\right)x$ We need to find t such that length of $\mathbf{B} = 3 \times$ length of $\mathbf{A}$

$$\left(1-\frac{t}{5}\right)x = 3\left(1-\frac{t}{4}\right)x \Rightarrow \left(\frac{5}{5}-\frac{t}{5}\right) = 3\left(\frac{4}{4}-\frac{t}{4}\right)$$

$$20-4t = 60-15t$$

$$11t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{11}$$

5 points problems | مسائل الخمس نقاط

21– لدى طارق ست بطاقات مكتوب عدد واحد على كل وجه من البطاقات. أزواج الأعداد على البطاقات هي $(5,\ 12),\ (3,\ 11),\ (0,\ 16),\ (7,\ 8),\ (4,\ 14), (9,\ 10)$. يمكن وضع البطاقات بأي ترتيب في المساحات الفارغة في الشكل. ما أصغر نتيجة يمكنه الحصول عليها؟

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

21. Tarek has six cards with one number written on each side of each card. The pairs of numbers on the cards are $(5,\ 12),\ (3,\ 11),\ (0,\ 16),\ (7,\ 8),$ $(4,\ 14)$ and $(9\ ,\ 10)$. The cards can be placed in any order in the blank spaces of the figure. What is the smallest result he can get?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
-23	-24	-25	-26	-27

الحل هو (D)

نفرض أن بطاقة منها مكتوب على جانبيها العددين a, A و $a < A$، وبطاقة أخرى مكتوب على جانبيها العددين b, B و $b < B$. وبفرض أن $a + A < b + B$، وهذا معناه $a - B < b - A$. بالمثل لو كونا متباينتين للأعداد المتبقية وجمعنا كل المتباينات.

لذلك نختار البطاقات الثلاث ذات المجاميع الأصغر على جانبي البطاقات،

$\underbrace{(5,\ 12)}_{17},\ \underbrace{(3,\ 11)}_{14},\ \underbrace{(0,\ 16)}_{16},\ \underbrace{(7,\ 8)}_{15},\ \underbrace{(4,\ 14)}_{18}, \underbrace{(9,\ 10)}_{19}$ وهي $14, 15, 16$ ونضع أرقامها الأصغر (وهي $3, 7, 0$) على علامة $+$، ثم نضع البطاقات الثلاث الأخرى بأرقامها الأكبر على علامة $-$. فنحصل على:

$$3 + 7 + 0 - 10 - 14 - 12 = -26$$

Let the numbers a, A and $a < A$, be written on one card and the numbers b, B and $b < B$, be written on another, and let be $a + A < b + B$. Then we observe that $a - B < b - A$. Likewise, if we create two inequalities for the remaining numbers and add all the inequalities.

So we select the three cards with the smallest totals on both sides of the cards $\underbrace{(5,\ 12)}_{17},\ \underbrace{(3,\ 11)}_{14},\ \underbrace{(0,\ 16)}_{16},\ \underbrace{(7,\ 8)}_{15},\ \underbrace{(4,\ 14)}_{18}, \underbrace{(9,\ 10)}_{19}$ and put their smaller numbers (which are $3, 7, 0$) to the + signs. Then we put the other three cards with their bigger numbers to the − signs . We obtain:

$$3+7+0-10-14-12=-26$$

22 . يحل الكنغر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ بينما يحل البيبراس المعادلة $bx^2+ax+c=0$ حيث a, b, c أعداد صحيحة مختلفة غير صفرية. واتضح أن المعادلتين تشتركان في أحد الحلول. أي مما يلي يجب أن يكون صحيحًا؟

22. Kangaroo solves the equation $ax^2+bx+c=0$, and Beaver solves the equation $bx^2+ax+c=0$, where a, b, c are pairwise distinct non-zero integers. It turns out that the equations share a solution. Which of the following must be true?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
The common solution must be 0 الحل المشترك يجب أن يكون 0	The quadratic equation $ax^2+bx+c=0$ has exactly one real solution المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ لها بالضبط حل حقيقي واحد	$a>0$	$b<0$	$a+b+c=0$

الحل هو (E)

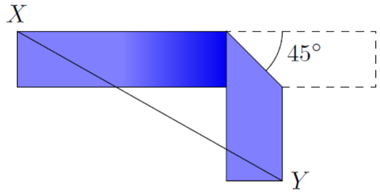
بفرض أن الحل المشترك هو r فإن $ar^2+br+c=br^2+ar+c$

$$ar^2+br-br^2-ar=0$$
$$r^2(a-b)-r(a-b)=0$$
$$(r^2-r)(a-b)=0$$
$$r(r-1)(a-b)=0$$

و لكن $r\neq 0$, $c\neq 0$, $a\neq b$ ، ومنها $r=1$. مما سبق نجد أن $a+b+c=0$.

If the common solution is r, then we have $ar^2+br+c=br^2+ar+c$, which leads to $r(r-1)(a-b)=0$. Since $a\neq b$, $c\neq 0$, $r\neq 0$, it must be the case that $a-b\neq 0$ and $r\neq 0$. Hence, we deduce that the common solution is $r=1$, which implies that $a+b+c=0$.

23– لدي شريط ورقي طوله $12\ cm$ وعرضه $2\ cm$، رسمت خطًا مائلًا بزاوية 45°، وطويت الشريط عند هذا الخط بحيث يصنع قسما الشريط زاوية قائمة كما هو موضح بالشكل. ما أقل طول ممكن للقطعة المستقيمة XY بوحدة السنتيمتر؟



23. I have a strip of paper that is $12\ cm$ long and $2\ cm$ wide. I make a crease across it at 45° and then fold it, so that the two parts of the strip are aligned in a right angle, as shown. What is the smallest possible length, in cm, of XY ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$6\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$	10	8	$6+\sqrt{2}$

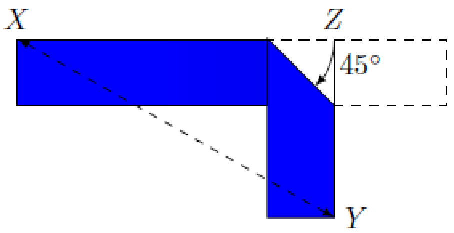
الحل هو (B)

المثلث XYZ قائم الزاوية في Z، فيه $XZ+ZY=12+2=14$. لكي يكون طول XY أقل ما يمكن يجب أن يكون المثلث متطابق الضلعين و يكون طول الوتر $7\sqrt{2}$.

الإثبات: إذا كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم a,b، فإن وتره ليس أصغر من وتر مثلث قائم طولا ضلعي القائمة $\frac{a+b}{2}$.

$$(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a+b}{2})^2 \le a^2+b^2 \Rightarrow 2(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}) \le a^2+b^2$$
$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \Rightarrow 0 \le a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 0 \le (a-b)^2$$

وهي صحيحة.



Consider the right-angled triangle XYZ . The sides XZ and ZY add to 14. We want to minimize the hypotenuse XY of this triangle and this will occur when the triangle is isosceles. Hence the answer is $7\sqrt{2}$.

The proof: if the lengths of two sides of right angle (of a right triangle) are a, b , then its hypotenuse is not less than the hypotenuse of a right triangle with the lengths of the two sides are $\dfrac{a+b}{2}$.

$$
\begin{aligned}
&(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a+b}{2})^2 \le a^2 + b^2 \Rightarrow 2(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}) \le a^2 + b^2 \\
&\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow 0 \le a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 0 \le (a-b)^2
\end{aligned}
$$

Which is true.

24– لدى فاطمة عدد من أحجار النرد، كل منها له 12 وجه مرقمة بالأعداد من 1 إلى 12. عند رميها جميعًا فإن احتمال ظهور العدد 12 مرة واحدة فقط يتساوى مع احتمال عدم ظهور العدد 12. كم عدد أحجار النرد لدى فاطمة؟

24. Fatimah has several unbiased 12-sided dice, each with faces labelled 1 to 12. When rolling all the dice at once, the probability of rolling a 12 exactly once is equal to the probability of rolling no 12s. How many dice does Fatimah have?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
8	9	10	11	12

الحل هو (D)

نفرض أن عدد أحجار النرد لدى فاطمة هو n. وعند رميهم، واحد منهم فقط يظهر العدد 12 والباقي وعددهم $n-1$ لا يظهر العدد 12 واحتمال ذلك $n\times\frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$. على الجانب الآخر احتمال ألا يظهر 12 في n رمية هو $\left(\frac{11}{12}\right)^{n}$. بتكوين معادلة:

$$\left(\frac{11}{12}\right)^{n}=n\times\frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$$
$$\frac{11}{12}=\frac{n}{12}$$
$$n=11$$

Suppose she is using n dice. Rolling exactly one 12 amounts to choosing one of the n dice to show 12 and all $n-1$ others to not show 12, which happens with probability $n\times\frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$. On the other hand, rolling no 12s has probability $\left(\frac{11}{12}\right)^{n}$. Setting these probabilities equal and cancelling a common factor of $\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$, we see that $\frac{11}{12}=\frac{n}{12}$ so $n=11$.

25- كثيرة الحدود $P(x)$ تحقق العلاقة $P(x+1) = x^2 - x + 2P(6)$ لجميع قيم x الحقيقية .
ما مجموع معاملات $P(x)$؟

25. A polynomial $P(x)$ satisfies the relation $P(x+1) = x^2 - x + 2P(6)$ for every real x. What is the sum of the coefficients of $P(x)$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
-40	-6	12	40	لا شيء مما سبق *none of the previous*

الحل هو (A)

بوضع $x = 5$ نحصل على $P(5+1) = 5^2 - 5 + 2P(6)$، ومنها $P(6) = 20 + 2P(6)$ ، ومنها $P(6) = -20$. ويصبح $P(x+1) = x^2 - x - 40$. كطريقة سريعة لإيجاد مجموع معاملات حدود كثيرة الحدود نوجد $P(1)$ وذلك بوضع $x = 0$:

$$P(0+1) = 0^2 - 0 - 40 \Rightarrow P(1) = -40$$

مجموع معاملات $P(x)$ تساوي -40 .

Putting $x = 5$ we get $P(5+1) = 5^2 - 5 + 2P(6)$, so that $P(6) = -20$. Now the given equation becomes $P(x+1) = x^2 - x - 40$. A quick way to find the sum of the coefficients of $P(x)$ is to observe that it is $P(1)$ (this is true for all polynomials). So putting $x = 0$ we get $P(1) = -40$.

26– القيم x,y,z تحقق أن $2^x=3\ ,\ 2^y=7\ ,\ 6^z=7$. أي مما يلي يعبر عن العلاقة بين x,y,z ؟

26. The values of x,y and z satisfy $2^x=3$, $2^y=7$ and $6^z=7$. Which of the following gives the relationship between x,y and z ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$z=\dfrac{y}{1+x}$	$z=\dfrac{x}{y}+1$	$z=\dfrac{y}{x}-1$	$z=\dfrac{x}{y-1}$	$z=y-\dfrac{1}{x}$

الحل هو (A)

نعلم أن:

$$7=6^z=(2\times3)^z=2^z\times3^z=2^z\times\left(2^x\right)^z=2^z\times2^{xz}=2^{z+xz}=2^{z(1+x)}$$

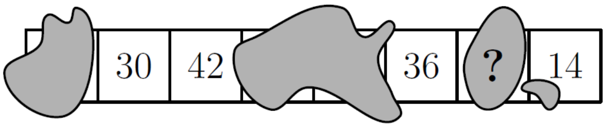
و لكن $2^y=7$ ، وهذا معناه $y=z(1+x)$ ، ومنها $z=\dfrac{y}{1+x}$.

Using various index laws, we have

$$7=6^z=(2\times3)^z=2^z\times3^z=2^z\times\left(2^x\right)^z=2^z\times2^{xz}=2^{z+xz}=2^{z(1+x)}.$$

But also $2^y=7$, so $y=z(1+x)$ and therefore $z=\dfrac{y}{1+x}$.

27– شريط من الورق مكون من ثمانية مربعات، في البداية كان كل مربع يحتوي على العدد 0 . وفي كل مرة نختار 4 مربعات متتالية ونضيف 1 لكل عدد من الأعداد الموجودة بهذه المربعات. يوضح الشكل النتيجة بعد عدد من المرات ولكن لسوء الحظ يغطي الحبر بعض هذه المربعات. ما العدد المكتوب في المربع الذي به علامة استفهام؟



27. A strip of paper consists of eight squares. Initially each square contains the number 0. In every move ,we chose 4 consecutive squares and add 1 to each of the numbers in those squares. The figure shows the outcome after a number of moves but unfortunately some ink is covering some of the squares. What number is written on the square with the question mark?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
24	30	36	48	لا شيء مما سبق *none of the previous*

الحل هو (A)

في كل مرة نختار 4 مربعات متتالية ونضيف 1 لكل عدد من الأعداد الموجودة بهذه المربعات، فبعد إجراء a من العمليات على المربعات الأربعة من الأول للرابع (من اليسار لليمين)، وبعد إجراء b من العمليات على المربعات الأربعة من الثاني للخامس و هكذا، سنصل للصورة الموضحة. وبملاحظة المربعين B, C نحصل على $a+b=30$ ، $a+b+c=42$ ومنها $c=12$. ولكن $c+d+e=36$. ومنها $d+e=24$. وإذا أردنا مثالاً يوضح أن الوضع قابل للتحقيق، فيمكننا أن نأخذ $a=17, b=13, c=12, d=10$ *and* $e=14$.

A	B	C	D	E	F	G	H
a	$a+b$	$a+b+c$	$a+b$ $+c+d$	$b+c$ $+d+e$	$c+d+e$	$d+e$	e

In every move ,we chose 4 consecutive squares and add 1 to each of the numbers in those squares. After a operations with the first four squares, b with the second run of four squares, etc, we will end up in a situation as in the figure above. From observing squares B and C, we see that $a+b=30, a+b+c=42$, and then $c=42-30=12$. Now look at squares F and G. The difference between them is c, so $c=12, c+d+e=36 \Rightarrow d+e=36-12=24$. If we want an example to show that the situation is attainable, we may take $a=17, b=13, c=12, d=10$ *and* $e=14$

28– الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق أن $f(20-x) = f(22+x)$ لجميع قيم x الحقيقية. إذا كان لهذه الدالة جذران بالضبط. فما مجموع هذين الجذرين؟

28. A function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies $f(20-x) = f(22+x)$ for all real x. It is known that f has exactly two roots. What is the sum of these two roots?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
-1	20	21	22	لا شيء مما سبق *none of the previous*

الحل هو (E)

إذا كان a أحد الجذور يمكننا اختيار x بحيث $20-x=a$، ومنها $20-a=x$. بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على: $f(a) = f(22+20-a)$، والتي تكافؤ $f(a) = f(42-a)$. وهذا معناه أن $42-a$ هو أحد الجذور أيضًا. إذن مجموع الجذور هو 42 $a+42-a=42$.

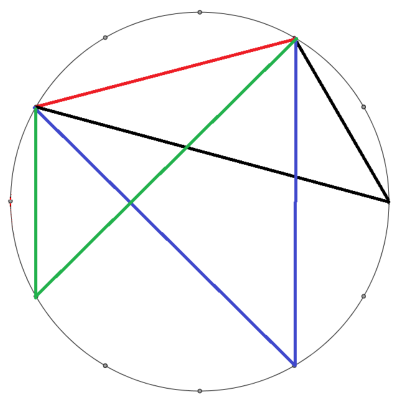
لاحظ أن $42-a$ هو بالتأكيد جذر مختلف، بفرض أن الجذرين متساويان $a=42-a$ ومنها $a=21$. إذا كان b هو الجذر الآخر المذكور في السؤال فسيكون $b \neq 21$. مما سبق نجد أن $42-b$ يكون جذر أيضًا. لكن $b \neq 42-b$ لأن $b \neq 21$. بالتالي المعادلة لها ثلاثة جذور و هي $a,b,42-b$ و هذا يتعارض مع الفرض السابق وبالتالي $a,42-a$ جذران مختلفان.

If a is one of the roots we can choose x so that $20-x=a$, that is, $20-a=x$. This gives $f(a) = f(42-a)$. So $42-a$ is also a root. Hence, the sum of the roots is $a+42-a=42$. Note that $42-a$ is definitely a different root because suppose $a=42-a$, so $a=21$. If b is the second root mentioned in the problem, so $b \neq 21$, then by the above $42-b$ is also a root. But as $b \neq 42-b$ (because $b \neq 21$), the equation would have three distinct roots $a,b,42-b$ contrary to assumption. Hence a and $42-a$ are distinct.

29– لدينا 12 نقطة متباعدة بشكل متساوٍ على دائرة. كم عدد المثلثات التي تحتوي على زاوية قياسها 45° و التي يمكن تكوينها باختيار ثلاث من هذه النقاط؟ 29. Twelve points are equally spaced on a circle. How many triangles containing a 45° angle can be formed by choosing three of these points?				
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
48	60	72	84	96

الحل هو (D)

لدينا **12** نقطة متباعدة بشكل متساوٍ على دائرة، الزاوية المركزية المقابلة لكل نقطتين متتاليتين $\mathbf{30^{\circ}}$.
الزاوية المحيطية $\mathbf{45^{\circ}}$ تقابل قوسًا مقداره $\mathbf{90^{\circ}}$. أي أن طرفي الضلعين اللذين يصنعان زاوية $\mathbf{45^{\circ}}$ يجب أن يكونا نقطتين يفصل بينهما 3 فواصل على الدائرة (لأن $\mathbf{3 \times 30^{\circ} = 90^{\circ}}$).
أي زاوية قياسها 45° يقابلها وتر (الملون باللون الأحمر) يصل بين نقطتين على الدائرة متباعدتان بمقدار ثلاث أجزاء. أي نقطة من النقاط الثمانية المتبقية نوصلها ببداية ونهاية الوتر لنكون الزاوية. عدد المثلثات $12 \times 8 = 96$ مثلث ممكن. لكن صبرًا يوجد تكرار، حيث أن كل مثلث متطابق الضلعين تم عده مرتين وعددهم 12. وبالتالي عدد المثلثات المختلفة $96 - 12 = 84$.



We have 12 points on a circle, and the central angle between each pair of consecutive points is 30°.
An inscribed angle of 45° subtends an arc of 90°. Therefore, the endpoints of the two sides that form a 45° angle must be two points that are separated by 3 intervals on the circle (since $3 \times 30^{\circ} = 90^{\circ}$).
An angle of 45° is created by a line subtended by two points spaced three apart. For any given base arc three points apart, there are 8 positions for the third vertex of the triangle. So we have $12 \times 8 = 96$ possible triangles. However, any isosceles triangles will be counted twice and there are 12 of these, so the total of different triangles is $96 - 12 = 84$.

30– عدد مميز مكون من أربع منازل $\overline{abcd}$ يحقق المعادلة $\overline{abcd}=a^a+b^b+c^c+d^d$. ما قيمة a؟

30. A special four-digit number $\overline{abcd}$ satisfies the equation $\overline{abcd}=a^a+b^b+c^c+d^d$. What is the value of a?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2	3	4	5	6

الحل هو (B)

نعلم أن $6^6=46656$، لذلك نستبعد العدد 6 تمامًا وتكون الأعداد المستخدمة أقل من 6.

ونعلم أن $4^4=256$ و $5^5=3125$.

كما أن $4^4+4^4+4^4+4^4=1024$ وهذا لا يحقق الشروط (لا يوجد في الخيارات $a=1$).

وكذلك $4^4+4^4+4^4+3^3=795<1000$. نلاحظ أنه بدون العدد 5 لا يمكن الحصول على عدد أكبر من 1000.

لذلك سنستخدم العدد 5 مرة واحدة لأن $5^5=3125$، أي أن أول منزلة على اليسار ستكون 3.

ويكون $a=3$.

العدد المميز هو $3^3+4^4+3^3+5^5=3435$.

Estimation shows that $6^6=46656$, $4^4=256$ so we cannot have a 6 or more as one of the digits, but without the 5 the right hand side won't be larger than 1000, so among a,b,c,d there should be exactly one 5, that makes $a=3$ since $5^5=3125$. The special number is $3^3+4^4+3^3+5^5=3435$.