الحلول الكاملة لكتيب ثاني وثالث ثانوي 2023

11-12 Student 2023

إخراج اللجنة العلمية

أ مها الداوود — أ عبد الوهاب الشيخ

أ طارق فضل

إشراف

أ صفوت الطنايني

3 point problems

مسائل الثلاث نقاط

1. ما قيمة $\frac{7777^2}{5555\times 2222}$ ؟

1. What is the value of $\frac{7777^2}{5555\times 2222}$ **?**

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	$\frac{7}{10}$	$\frac{49}{10}$	$\frac{77}{110}$	49

الحل هو (C)

$$\frac{7777^2}{5555\times 2222}=\frac{7\times 1111\times 7\times 1111}{5\times 1111\times 2\times 1111}=\frac{7\times 7}{5\times 2}=\frac{49}{10}$$

2. ألقت جودي خمسة أحجار نرد، وحصلت إجمالاً على 19 نقطة. ما أكبر عدد ممكن من الأحجار يظهر عليها العدد 6 ؟

2. Judy rolls five dice. She rolls 19 points in total. What is the maximum number of sixes she could have rolled?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0	1	2	3	4

الحل هو (C)

عندما تلقي جودي أحجار النرد الخمسة؛

لو أنها حصلت على العدد 6 أربع مرات فإن مجموع نقاطها سيكون 25 على الأقل لأن $6+6+6+6+1=25$.

لو أنها حصلت على العدد 6 ثلاث مرات فإن مجموع نقاطها سيكون 20 على الأقل لأن $6+6+6+1+1=20$.

لو أنها حصلت على العدد 6 مرتان فإن مجموع نقاطها ممكن أن يكون 19 بأكثر من طريقة منها؛

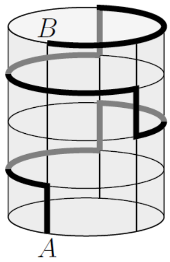
$6+6+5+1+1=19$ أو $6+6+4+2+1=19$ أو $6+6+3+3+1=19$ أو

$6+6+3+2+2=19$

وبذلك يكون أكبر عدد من المرات حصلت فيها جودي على العدد 6 هو مرتان.

If Judy rolls four sixes, she has at least 24 points. She cannot roll 3 sixes, as $3 \cdot 6 = 18$, and she must roll at least one with each of the other two dice, and $18 + 1 + 1 = 20$ in total. She can, however, roll two sixes. For instance, she can roll $6 + 6 + 5 + 1 + 1 = 19$. The correct answer is therefore 2.

3. علبة أسطوانية الشكل ارتفاعها $15\ cm$ ومحيط قاعدتها الدائرية $30\ cm$. تتحرك نملة من النقطة A على القاعدة السفلية إلى النقطة B على القاعدة العلوية. إذا علمت أن مسار حركة النملة إما رأسيًا لأعلى أو أفقيًا عبر السطح المنحني للعلبة. يوضح الشكل التالي مسار الحركة للنملة والذي يمثله الخط السميك (أسود من الأمام ورمادي من الخلف). ما طول مسار النملة؟



3. A cylindrical can has height $15\ cm$ and the perimeter of its circular base is $30\ cm$. An ant walks from point A on the base to point B on the roof. Its path is either vertically upwards or horizontally along circular arcs around the can. Its path is shown with a thicker line (black for the path on the front of the can and grey at the back). What is the length of the ant's path?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$45\ cm$	$55\ cm$	$60\ cm$	$65\ cm$	$75\ cm$

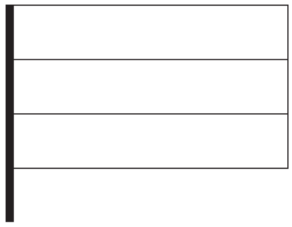
الحل هو (E)

سننظر لمسار النملة كليا على أنه جزأين أفقي ورأسي. الجزء الأفقي إجمالًا يمثل محيط دائرتين، أما الجزء الرأسي يمثل ارتفاع العلبة الأسطوانية.

طول المسار بالسنتيمتر $75 = 15 + 30 \times 2 = 15 + 60$.

We do not calculate the individual parts of the path, but we look at them as a whole. The vertical parts add up to the height of the can, so it is 15 cm. The horizontal paths, if projected to the ground, can be seen to be two full base circles, so their length is $2 \times 30 = 60$ cm. The grand total is $15 + 60 = 75$ cm.

4. لدى هبة الله أربعة أقلام تلوين مختلفة، وتريد تلوين المستطيلات الثلاثة في العلم الموضح بالشكل التالي بحيث يتم تلوين كل مستطيل بلون واحد فقط و لا يتجاور مستطيلان لهما نفس اللون. بكم طريقة يمكنها فعل ذلك؟



4. Hebatallah has four different coloured pens. She wants to colour the three-striped rectangular flag shown in the diagram so that each stripe is a single colour and no two adjacent stripes are the same colour. In how many ways can she do this?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
24	27	32	36	64

الحل هو (D)

المستطيل الأول له 4 طرق للتلوين حيث يمكن اختيار أي لون من الأربعة ألوان. المستطيل الثاني له 3 طرق للتلوين حيث يمكن اختيار أي لون من الثلاثة ألوان المتبقية بعد اختيار اللون السابق. المستطيل الثالث له 3 طرق للتلوين حيث يمكن اختيار أي لون من الأوان الثلاثة المتبقية بعد اختيار اللون السابق. إجمالي عدد طرق التلوين هو $3\times3\times4=36$ طريقة.

The top stripe can be in any of the four colors. Each of these can be combined with three of the colors, as no two adjoining stripes can be of the same color. The bottom stripe can again be any of the three colors not in the middle. This means that there are a total of
$36=3\times3\times4$ possible flags.

5. نطلق على العدد الصحيح الموجب n أنه ثنائي الأولية إذا كان لهذا العدد ثلاثة قواسم مختلفة بالضبط، وهي 1 و 2 و العدد n نفسه. كم عدد الأعداد المختلفة ثنائية الأولية؟

5. We call a positive integer n two-prime, if it has exactly three different divisors, namely 1, 2 and n itself. How many different two-prime integers are there?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0	1	2	3	4

الحل هو (B)

لا يوجد إلا عدد واحد ثنائي الأولية هو $2^2 = 4$. لأن أي عدد n يمكن كتابته على الصورة $n = 2 \cdot k$ حيث k عدد صحيح. ومن المعطيات يتضح لنا أنه لكي يكون n عدد ثنائي الأولية لابد أن قيمة k تساوي n وهذا مستحيل، أو قيمة k تساوي 1 وهذا مستحيل، أو قيمة k تساوي 2 وبالتالي العدد سيكون 4 . الخلاصة لدينا عدد واحد فقط ثنائي الأولية.

The only two-prime number is $2^2 = 4$. Any number n = 2 · k is divisible by 2 and k (as well as 1 and n), and therefore k = 2 must hold for a two-prime number.

6. كم عدد الأزواج المرتبة الصحيحة الموجبة (x, y) التي تحقق المعادلة $x+2y=2^{10}$ ؟

6. How many pairs of positive integers (x, y) satisfy the equation $x+2y=2^{10}$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2^9-1	2^9	2^9+1	2^9+2	0

الحل هو (A)

لأن الأعداد صحيحة موجبة $x>0, y>0$

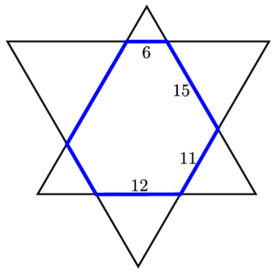
$$x+2y=2^{10} \Rightarrow x=2^{10}-2y$$
$$x>0 \Rightarrow 2^{10}-2y>0$$
$$2^{10}>2y$$
$$2y<2^{10}$$

بالقسمة على 2 نحصل على $y<2^9$. إذن عدد قيم y الممكنة هي 2^9-1 ، وكلها تتضمن أن قيم $x=2^{10}-2y$ صحيحة موجبة.

وبالتالي عدد الأزواج المرتبة الممكنة هي 2^9-1 .

If the value of y is any of the numbers from 1 to 2^9-1, there is a solution in positive integers for $x=2^{10}-2y$, as we then have $2y<2^{10}$. For all other values of y, there is no appropriate value of x. We therefore have a total of 2^9-1 pairs of integers satisfying the equation.

7. تم وضع مثلثين متطابقي الأضلاع بحيث يكوّنان مضلعًا سداسيًا يتوازى فيه كل ضلعين متقابلين. الشكل التالي يوضح أطوال أربعة أضلاع من المضلع السداسي. ما محيط هذا السداسي؟

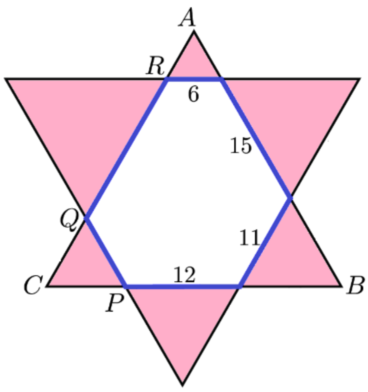


7. Two equilateral triangles are put together to form a hexagon with their opposite sides parallel. We know the length of four sides of this hexagon, as shown in the diagram. What is the perimeter of the hexagon?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
64	66	68	70	72

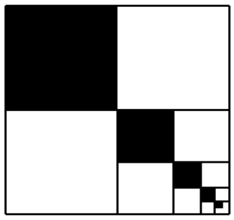
الحل هو (D)

من هندسة الشكل جميع المثلثات الوردية متطابقة الأضلاع، ومن ثم $AB = 6+15+11 = 32$ ، ومنها $BC = 32$ ، وبالتالي $CP = 32-(12+11) = 9$ ، وبالتالي $QP = 9$. بالمثل $AC = 32$ ، وبالتالي $QR = 32-(9+6) = 17$. إذن محيط المضلع السداسي يساوي $6+15+11+12+9+17 = 70$.



Because the sides are parallel, all the tips of the star are equilateral triangles and hence the side AB of triangle ABC in the picture is 6 + 15 + 11 = 32 long, but then the length of BC is also 32, so that PC = 32 − (12 + 11) = 9 and QR = 32 − (9 + 6) = 17. The perimeter is 6 + 15 + 11 + 12 + 9 + 17 = 70.

8. تم تقسيم مربع مساحته 84 إلى أربعة مربعات، تم تلوين المربع العلوي الأيسر باللون الأسود. تم تكرار العملية مع المربع السفلي الأيمن أيضاً بتقسيمه إلى أربعة مربعات، وتلوين المربع العلوي الأيسر منها باللون الأسود. وهكذا تم تكرار هذه العملية عدد لانهائي من المرات. ما المساحة الكلية الملونة باللون الأسود؟



8. A square with area 84 is divided into four squares. The upper left square is coloured black. The lower right square is again divided into four squares, and so on. The process is repeated an infinite number of times. What is the total area that is coloured black?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
24	28	31	35	42

الحل هو (B)

في كل مرحلة من المراحل يتم تلوين مربع واحد من أصل ثلاثة مربعات لم يتم تقسيمها. فيكون مساحة الجزء المظلل يمثل $\frac{1}{3}$ مساحة الشكل كاملًا، أي يساوي 28.

حل آخر: الجزء المظلل يمثل متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول $\frac{1}{4}$ وأساسها $\frac{1}{4}$. فيكون مساحة الجزء المظلل يساوي

$$84\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=84\times\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=84\times\frac{1}{3}=28$$

At each stage, $\frac{1}{3}$ of the smaller squares are coloured black so in total $\frac{1}{3}$ of the original square is black giving a black area of 28.

Alternative solution: The shaded part represents an infinite geometric sequence with its first term $\frac{1}{4}$ and common ratio $\frac{1}{4}$. The area of the shaded part is equal to

$$84\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=84\times\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=84\times\frac{1}{3}=28$$

9. نريد وضع كل عدد من الأعداد الصحيحة من 1 إلى 9 في أحد المربعات التسعة الموجودة في الصورة التالية، بحيث يكون مجموع الأعداد في أي ثلاثة مربعات متجاورة مضاعفًا للعدد 3. تم وضع العددين 7 و 9 بالفعل كما بالشكل. كم عدد الطرق المختلفة لملء المربعات المتبقية؟

	7		9					

9. Each of the integers from 1 to 9 is to be placed in one of the 9 boxes in the picture so that any three numbers in consecutive boxes add to a multiple of 3. The numbers 7 and 9 have already been placed. In how many different ways can the remaining boxes be filled?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	12	15	18	24

الحل هو (E)

	7		9					

نلاحظ أن: $7=2\times3+1$ و $9=3\times3$. إذن يجب أن يكون العدد بين 7 و 9 على الصورة $3x+2$ لكي يقبل مجموع الأعداد الثلاثة القسمة على 3، وهذا يعطينا الخيارات $2,5,8$ لهذا المربع الأحمر. بينما المربع الأزرق نحتاج أن نضع فيه عدد على الصورة $3x$ لنفس السبب، وهذا يعطي الخيارين $3,6$. في حين المربع الأخضر، نحتاج أن نضع فيه عددًا يكتب على الصورة $3x+1$، وهذا يعطينا الخيارين $1,4$. كذلك عدد المربع الأصفر يكون على الصورة $3x+2$، وهذا يعطينا الخيارات $2,5,8$ أحدهما استخدم في المربع الأحمر. اذن المتبقي خياران لهذا المربع. أما بقية المربعات المتبقية ليس لديها الا طريقة واحدة لملئها. وبالتالي عدد الطرق هو $3\times2\times2\times2\times1\times1\times1=24$.

Noting that $7 = 2 \cdot 3 + 1$ and $9 = 3 \cdot 3$, the number between 7 and 9 must be of the form $3x + 2$ in order for the sum of the three to be divisible by 3. This gives us the options 2, 5 and 8 for this square. The left square must be filled with a number of the form $3x$ for the analogous reason, and this gives the options 3 and 6. We therefore have a total of $3 \cdot 2 = 6$ possible ways to fill the two squares next to the digit 7. Next to the 9, we again need a digit of the form $3x + 1$, and therefore 4 or 1, and next to that, a digit of the form $3x + 2$, of which we still have two digits not yet used. This gives us a total of $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ ways to fill the 6 leftmost squares. This forces a single option for each of the remaining squares, as these must be of the form $3x$, $3x + 1$ and $3x + 2$, respectively, and there is only one digit of each type left to place. This means that there is a total of 24 options to distribute the digits in a way that fulfills the conditions.

10. ما رقم الآحاد لحاصل الضرب $(5^5+1)(5^{10}+1)(5^{15}+1)$ ؟

10. What is the units digit of the product $(5^5+1)(5^{10}+1)(5^{15}+1)$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	2	4	5	6

الحل هو (E)

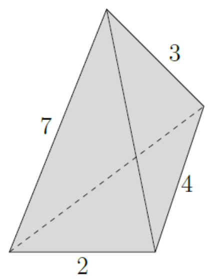
رقم الآحاد للعدد 5^n **دائمًا يكون** 5 . **رقم الآحاد للعدد** $\left(5^n+1\right)$ **دائمًا يكون** 6 .

رقم آحاد حاصل الضرب $(5^5+1)(5^{10}+1)(5^{15}+1)$ **هو نفسه رقم آحاد** 6^3 **و هو** 6 .

The units digit o**f** 5^n is 5 for all positive integers n. Therefore the units digit of $\left(5^n+1\right)$ is 6. Hence the units digit of the product is the same as the units digit of 6^3 which is 6.

3 point problems مسائل الثلاث نقاط

11. هرم ثلاثي أطوال أحرفه هي أعداد صحيحة. الشكل التالي يوضح أطوال أربعة أحرف منها. ما مجموع طولي الحرفين المتبقيين؟



11. A triangular pyramid has edges of integer length. Four of these lengths are as shown in the diagram. What is the sum of the lengths of the other two edges?

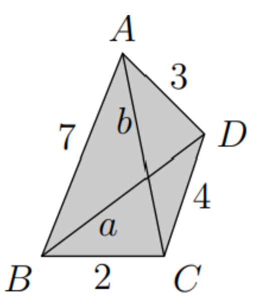
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	10	11	12	13

الحل هو (C)

باستخدام متباينة المثلث عدة مرات. من ΔABD نجد أن $7-3<a<7+3$، ومنها $4<a<10$. ولأن أطوال الأحرف أعداد صحيحة $a\in\{5,6,7,8,9\}$. بالمثل من ΔDBC نجد أن $4-2<a<4+2$، ومنها $2<a<6$. ومنها $a\in\{3,4,5\}$. إذن $a=5$.

أيضًا من ΔABC نجد أن $7-2<b<7+2$، ومنها $5<b<9$. ومنها $b\in\{6,7,8\}$، بالمثل من ΔADC نجد أن $4-3<b<4+3$، ومنها $1<b<7$. ومنها $b\in\{2,3,4,5,6\}$. إذن $b=6$.

أي أن $a+b=5+6=11$.



We use the triangle inequality several times. From the triangle ABD we have $7 - 3 < a < 7 + 3$, so that (the integer) $a \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Also from the triangle BCD we have $4-2 < a < 4+2$, so $a \in \{3, 4, 5\}$. It follows that a is in the intersection of the two set, so $a = 5$. Similarly from the triangles ABC and ACD we have $7 - 2 < b < 7 + 2$ and $4 - 3 < b < 4 + 3$. These give $b \in \{6, 7, 8\}$ and $b \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, so $b = 6$. Finally, $a + b = 5 + 6 = 11$.

12. لأي عدد صحيح موجب n، يعرف $n!$ على أنه حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة من 1 إلى n. على سبيل المثال $24=1\cdot2\cdot3\cdot4=!4$. ما مجموع أرقام العدد N إذا كان $N!=6!\cdot7!$؟

12. For a positive integer n, $n!$ is defined as the product of all integers from 1 to n. For example, $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. What is the sum of the digits of N if $N!=6!\cdot7!$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	2	4	8	9

الحل هو (A)

$$
\begin{aligned}
N! &= 7!\cdot 6! \\
&= 7!\cdot 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 \\
&= 7!\cdot 3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 \\
&= 7!\cdot 2\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot5 \\
&= 7!\cdot 8\cdot9\cdot10 \\
&= 10!
\end{aligned}
$$

إذن $N=10$، مجموع الأرقام يساوي $0+1=1$.

$N! = 7!\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 7!\cdot3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 7!\cdot8\cdot9\cdot10 = 10!$.
Hence $N = 10$, and the sum of its digits $0+1=1$.

13. إذا كانت منحنيات الدوال $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ كلها تمر بنفس النقطة مهما كانت قيمة a. ما مجموع إحداثيي هذه النقطة؟

13. The graphs of the functions $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ all pass through the same point, no matter what value of a is chosen. What is the sum of the coordinates of that point?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2	4	7	8	لا شيء مما سبق *none of the previous*

الحل هو (E)

إذا كان $a = 0$ فإن $y = x^3 + 3x^2 + 4$، إذا كان $a = 1$ فإن $y = x^3 + 3x^2 + x + 6$.

أي أن $x^3 + 3x^2 + x + 6 = x^3 + 3x^2 + 4$ ، ومنها $x + 6 = 4$، ومنها $x = -2$. بالتعويض

$$y = (-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) + 6 = (-8) + 3(4) + (-2) + 6 = 8$$

إحداثيات النقطة هي $(-2, 8)$. ومن ثم مجموع الإحداثيات $-2 + 8 = 6$. إذن الخيار الصحيح هو **E**.

For a = 0 we get $y = x^3 + 3x^2 + 4$. For a = 1 we get $y = x^3 + 3x^2 + x + 6$. Therefore,
subtracting the first of these equations to the second one, we get 0 = x + 6 − 4, so x = −2. We substitute this value into the first equation to get $y = (-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) + 6 = 8$. The solution is $-2 + 8 = 6$, then E is the correct option.
(Note: We can check that, in fact, (−2, 8) is a solution for any a.)

14. لدينا خمسة أعداد a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 مجموعهم يساوي S. لكل قيم k بحيث $1 \le k \le 5$ يكون $a_k = k + S$. ما قيمة S؟

14. We are given five numbers a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 whose sum is S. For each k, $1 \le k \le 5$, we know that $a_k = k + S$. What is the value of S ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$	-15	15	لا شيء مما سبق *none of the previous*

الحل هو (B)

لدينا $a_5 = 5+S$, $a_4 = 4+S$, $a_3 = 3+S$, $a_2 = 2+S$, $a_1 = 1+S$. ولكن

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$
$$S = 1+S+2+S+3+S+4+S+5+S$$
$$S = 15+5S$$
$$-4S = 15$$
$$S = \frac{-15}{4}$$

We have $a_1 = 1+S$, $a_2 = 2+S$, $a_3 = 3+S$, $a_4 = 4+S$, $a_5 = 5+S$. But

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$
$$S = 1+S+2+S+3+S+4+S+5+S$$
$$S = 15+5S$$
$$-4S = 15$$
$$S = \frac{-15}{4}$$

15. كم عدد الأزواج المرتبة من العددين الصحيحين m ، n التي تحقق المتباينة $\|2m-2023\|+\|2n-m\|\le 1$ ؟ 15. How many pairs of integers m and n satisfy the inequality $\|2m-2023\|+\|2n-m\|\le 1$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0	1	2	3	4

الحل هو (B)

نعلم أن ناتج القيمة المطلقة لا يمكن أن يكون سالبًا. و بما أن m ، n عددان صحيحان، فإن كل من القيمتين المطلقتين الموجودتين في السؤال إما كلاهما تساوي 0 أو إحداهما تساوي 0 والأخرى تساوي 1. بما أن 2023 عدد فردي فإن $|2m-2023|\neq 0$. فلذلك

$$
\begin{aligned}
&|2m-2023|=1 \\
&2m-2023=1 \quad or \quad 2m-2023=-1 \\
&2m=1+2023 \quad or \quad 2m=-1+2023 \\
&2m=2024 \quad or \quad 2m=2022 \\
&m=1012 \quad or \quad m=1011
\end{aligned}
$$

وعلى ذلك $|2n-m|=0$. هذا يقتضي أن m عدد زوجي . أي أن $m=1012$ ، ومنها $n=506$.

إذن لا يوجد إلا زوج مرتب واحد وهو $(n,m)=(506,1012)$.

Since the absolute value of any number is not negative and both m and n are integers, both of the summands must be 0 or one of them must be 0 and the other must be 1. Now, 2023 is odd, therefore $|2m-2023|\neq 0$, then |2m−2023| = 1 and so, 2m = 2024 or 2m = 2022 which gives m = 1011 or m = 1012 but, since |2n − m| = 0, m must be even and hence the only solution is (n,m) = (506, 1012).

16. يقف 23 حيوانًا في صف واحد. كل حيوان إما جمل أو كنغر. كل حيوان يجاوره كنغر واحد على الأقل. ما أكبر عدد من الجمال يمكن أن يتواجد في الصف؟

16. There are 23 animals standing in a row. Each animal is either a camel or a kangaroo. Everyone has at least one neighbor who is a kangaroo. What is the largest possible number of camels in the row?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
7	8	10	11	12

الحل هو (D)

لنرمز للكنغر k والجمل C. لن يكون في الصف CCC (لأن الجمل الأوسط لن يجاوره أي كنغر)، وكذلك لا يوجد CKC (لأن الكنغر الأوسط لن يجاوره أي كنغر). ومن ثم لن يكون في الصف أيضًا $CCKC$، $CKCC$، $CCCC$. هذا معناه أنه بين كل أربعة حيوانات متجاورة يوجد على الأكثر جملان. أي أن بين أول عشرين حيوان يوجد على الأكثر عشرة جمال، والحيوانات الثلاثة المتبقية ستكون KKC أو CKK وكلاهما يحتوي جملًا واحدًا على الأكثر. يصبح لدينا 11 جملًا على الأكثر. إحدى الطرق الممكنة لوقوف الحيوانات في صف هي:

$$CKKC\ CKKC\ CKKC\ CKKC\ CKKC\ CKK$$

Denote a kangaroo by K and a camel by C. CCC is not allowed, and CKC is also not allowed (because the middle animal has not at least one neighbor who is a kangaroo) . It means CCCC, CKCC, CCKC are also not allowed, so between 4 neighbouring animals a maximum of 2 can be a C . From the first 20 animals, a maximum 10 are C. For the remaining 3 animals at the end of the row. They can only be ...KKC or ...CKK, so 2 of them are K’s, so altogether there can be at most 11 C’s. It is possible:

CKKC CKKC ... CKKC CKK

17. العدد 5^{5^6} يمكن أن يُكتب على الصورة n^n حيث n عدد صحيح. فما قيمة n؟

17. The number 5^{5^6} can be written in the form n^n for some integer n.
What is the value of n?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
5^{30}	5^{6}	5^{5}	30	11

الحل هو (C)

$$5^{5^6} = 5^{5^5 \cdot 5} = 5^{5 \cdot 5^5} = \left(5^5\right)^{5^5}$$

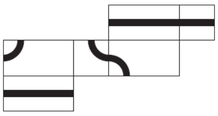
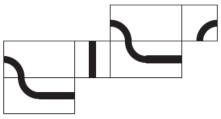
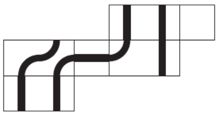
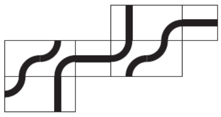
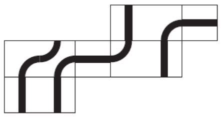
أي أن $n = 5^5$

$$5^{5^6} = 5^{5^5 \cdot 5} = 5^{5 \cdot 5^5} = \left(5^5\right)^{5^5}$$

So $n = 5^5$

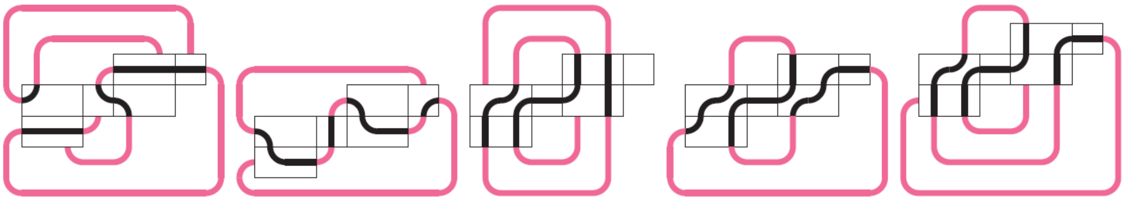
18. رسم محمد مسارًا مغلقًا على صندوق على شكل متوازي مستطيلات. ثم قام بفتح الصندوق من بعض جوانبه وبسطه ليكون شبكة. أي الشبكات التالية توضح ذلك المسار؟

18. Mohamed has drawn a closed path on a rectangular prism, and then unfolded it to give a net. Which net could show his path?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
				

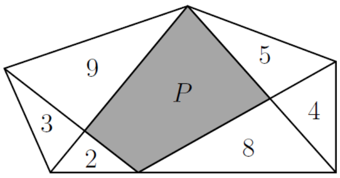
الحل هو (D)

لأنه المسار الوحيد المغلق



The nets given can be folded into solid uniquely. Following the path one can see that only (D) is closed. Connections in magenta show which pieces are glued together (i.e. belong to the same path).

19. تم تقسيم شكل خماسي إلى أجزاء أصغر كما هو موضح. الأعداد المكتوبة داخل المثلثات تشير إلى مساحاتها.
ما هي مساحة الرباعي المظلل P ؟



19. A pentagon is dissected into smaller parts, as shown. The numbers inside the triangles indicate their areas. What is the area P of the shaded quadrilateral?

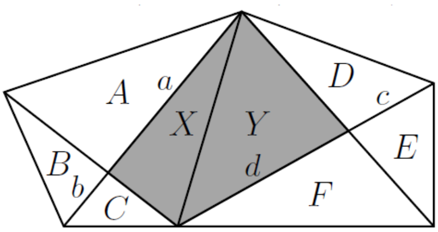
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
15	$\frac{31}{2}$	16	17	18

الحل هو (C)

برسم قطر يقسم الرباعي المظلل إلى قسمين X , Y . بتطبيق حقيقة أن "النسبة بين مساحتي مثلثين لهما نفس الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما" يمكننا الحصول على

$$\frac{X}{C}=\frac{A}{B}=3\Rightarrow X=3C=2\cdot3=6$$
$$\frac{Y}{D}=\frac{F}{E}=2\Rightarrow Y=2D=2\cdot5=10$$

ومنها $X+Y=6+10=16$. ومنها مساحة الرباعي المظلل = 16.



Draw the diagonal across the shaded area, as shown. Areas A and B have the same altitude and A = 3B so their bases satisfy a = 3b. It follows that X = 3C = 6. Similarly F = 2E so d = 2c and so Y = 2D = 10. We conclude that P = X+Y = 16. (Note that, more generally, what this is really saying is that AC = BX and DF = EY . So the required area is X + Y = AC/B + DF/E, here 9 × 2/3 + 5 × 8/4 = 16.)

20. كم عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد $2^{20}\cdot 3^{23}$ و ليست قواسم للعدد $2^{10}\cdot 3^{20}$؟ **20.** How many integers are factors of $2^{20}\cdot 3^{23}$ but are not factors of $2^{10}\cdot 3^{20}$?				
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
13	30	273	460	لا شيء مما سبق *none of the previous*

الحل هو (C)

لاحظ أن العدد $2^{10}\cdot 3^{20}$ من قواسم العدد $2^{20}\cdot 3^{23}$. وهذا يعني أن جميع قواسم العدد $2^{10}\cdot 3^{20}$ هي من قواسم العدد $2^{20}\cdot 3^{23}$ أيضًا. الآن سنستخدم الحقيقة التالية " إذا كانت $p_1, p_1, ..., p_n$ أعداد أولية، $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ أعداد صحيحة موجبة، فإن عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد $A = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ هي $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$ "

وبالتالي عدد قواسم العدد $2^{10}\cdot 3^{20}$ يساوي $(10+1)\cdot(20+1) = 11\cdot 21 = 231$ ، عدد قواسم العدد $2^{20}\cdot 3^{23}$ يساوي $(20+1)\cdot(23+1) = 21\cdot 24 = 504$. إذن عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد $2^{20}\cdot 3^{23}$ و ليست قواسم للعدد $2^{10}\cdot 3^{20}$ يساوي $504 - 231 = 273$.

Note that the first number, 220323, is a multiple of the second, 210320. It follows that each divisor of the second number is also a divisor of the first. Now we will use the fact: "If $p_1, p_1, ..., p_n$ are prime numbers and $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ are positive integers, then the number of positive divisors of the number $A = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ is $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$. Hence the total number of divisors of the first number is (20 + 1)(23 + 1) = 21 · 24 = 504 and of the second is (10 + 1)(20 + 1) = 11 · 21 = 231. So the difference of the two, namely 504 -231 = 273 is the required answer.

5 point problems

مسائل الخمس نقاط

21. الدالتان f، g على $\mathbb{R}$ تحققان نظام المعادلات $f(x)+2g(1-x)=x^2$، $f(1-x)-g(x)=x^2$. ما هي الدالة $f(x)$؟

21. Two functions f and g on $\mathbb{R}$ satisfy the system of equations $f(x)+2g(1-x)=x^2$ and $f(1-x)-g(x)=x^2$. What is $f(x)$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$	$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$	$-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$	x^2-4x+5	لا يوجد دوال تحقق النظام here are no such functions

الحل هو (A)

بالتعويض عن x بالقيمة $1-x$ في المعادلة الثانية تصبح

$$f(1-1+x)-g(1-x)=(1-x)^2$$
$$f(x)-g(1-x)=1-2x+x^2$$

و بحل نظام المعادلتين

$$f(x)-g(1-x)=1-2x+x^2$$
$$f(x)+2g(1-x)=x^2$$

وذلك بضرب بعد ضرب المعادلة الأولى في 2 والجمع، نحصل على $3f(x)=3x^2-4x+2$. ومنها نجد $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

Putting 1−x in the place of x, the second equation becomes $f(x)-g(1-x)=1-2x+x^2$. Solving the system of the first equation and this last in terms of f(x) and g(1 − x), by multiplying first equation by 2 and adding, we get $3f(x)=3x^2-4x+2$, and then $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

22. في مسابقة تسلق الصخور؛ يتنافس 13 متسلقًا في ثلاث مراحل. درجة كل متسابق هي حاصل ضرب ترتيبه في المراحل الثلاث. على سبيل المثال، إذا حصل أحدهم في المراحل الثلاث على المركز الرابع والمركز الثالث والمركز السادس، فإن درجته النهائية هي $4\cdot3\cdot6=72$. وكلما زادت درجاتك، أصبح ترتيبك الإجمالي أسوأ. إذا حصل سلمان على المركز الأول في مرحلتين. ما هو أسوء ترتيب إجمالي يمكن أن يحصل عليه سلمان؟

22. In a bouldering competition, 13 climbers compete in three categories. The score of each competitor is the product of his rankings in the three categories. For example, if one is $4th$, $3rd$ and $6th$, his final score is $4\cdot3\cdot6=72$. The higher your score, the worse your overall ranking will be. Salman ranks $1st$ in two of the categories. What is the worst possible overall ranking Salman can get?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$2nd$	$3rd$	$4th$	$5th$	$6th$

الحل هو (B)

سنوضح طريقة تجعل سلمان في المركز الثالث في الترتيب الإجمالي. يمكن أن تكون درجة سلمان النهائية هي $1\cdot1\cdot13=13$. يمكن أن تكون الدرجة النهائية لأحد المنافسين في هذه الحالة $2\cdot2\cdot2=8$ ، بينما يمتلك منافس آخر في نفس الوقت درجة نهائية مقدارها $3\cdot3\cdot1=9$. وبذلك من الممكن أن يحتل سلمان المرتبة الثالثة في الترتيب الإجمالي. سنبين الآن أنه لا يمكن أن يكون هناك أكثر من متنافسين متقدمين على سلمان في الترتيب الإجمالي. درجة سلمان النهائية هي على الأكثر **13**. فلنفترض أن هناك **3** متنافسين متقدمين على سلمان في الترتيب الإجمالي. ترتيبهم في المسابقة الأولى هو **2** و **3** و **4** على الأقل، وكذلك ترتيبهم في المسابقة الثانية. ترتيبهم في المسابقة الثالثة هو على الأقل **1** و **2** و **3**. يكون حاصل ضرب الدرجات النهائية لهؤلاء المتسابقين الثلاثة $2^3\cdot3^3.4^2=3456$ على الأقل. إذا كان كل المتنافسين الثلاثة قد حصلوا على **13** درجة نهائية كحد أقصى، فإن حاصل ضرب درجاتهم النهائية سيكون $13^3=2197$ على الأكثر. هذا تناقض. إذن أسوأ ترتيب إجمالي لسلمان هو الثالث.

We show a way that Salman can be third. Salman's points can be 1 · 1 · 13 = 13. One competitor's score in this case can be 2 · 2 · 2 = 8, while another competitor simultaneously has $3\cdot3\cdot1=9$. We see that it is possible for Salman to place third. We will now show that there cannot be more than two competitors ahead of Salman. Salman's score is at most 13. Let's say there are 3 competitors ahead of Salman. Their ranks in the first competition are at least 2, 3 and 4, as are their ranks in the second competition. Their ranks in the third competition are at least 1, 2 and 3. The product of the total ranks of these three contestants is therefore at least

$2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^2 = 3456$. If all three competitors had a maximum score 13, the product of their scores can be at most $13^3 = 2197$. This is a contradiction, and we see that there can be at most two competitors ahead of Salman.

23. تم إنشاء دوامة من الأعداد المتتالية بدءًا من العدد 1 كما هو موضح. كيف سيظهر ترتيب الأعداد 625 و 626 و 627 في هذه الدوامة إذا استمرت بنفس النمط؟

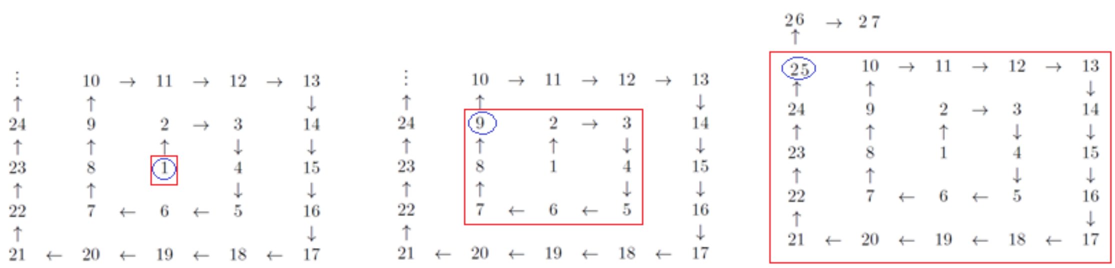
$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & 10 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 12 & \rightarrow & 13 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\
24 & & 9 & & 2 & \rightarrow & 3 & & 14 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
23 & & 8 & & 1 & & 4 & & 15 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
22 & & 7 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 5 & & 16 \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
21 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 19 & \leftarrow & 18 & \leftarrow & 17
\end{array}$$

23. A spiral of consecutive numbers is created, as shown, starting with 1. When the pattern of the spiral is continued. In which arrangement will the numbers 625, 626 and 627 appear?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 626 & \rightarrow & 627 \\ \uparrow & & \\ 625 & & \end{array}$	$625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$	$\begin{array}{ccc} 625 & \rightarrow & 626 \\ & & \downarrow \\ & & 627 \end{array}$	$\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$

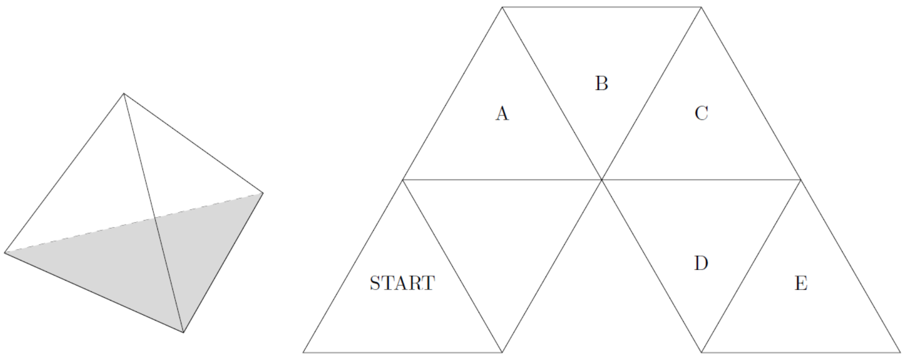
الحل هو (B)

لو نظرنا للمربعات ذات الأطوال الفردية $1\times 1, 3\times 3, 5\times 5, \ldots$ والتي في مركزها العدد 1، ستجد في ركنها الأيسر العلوي عددًا يساوي مربع طول ضلع هذا المربع. مسار الدوامة بعده سيكون سهم لأعلى متبوعًا بسهم لليمين (لضمان استمرار الدوامة بنفس النمط). ولأن $625 = 25^2$ فسينطبق عليه نفس الأمر سيكون السهم بعده لأعلى متبوعًا بسهم لليمين. الخيار الصحيح هو **B**.



If we look at the squares of odd lengths $1\times 1, 3\times 3, 5\times 5, \ldots$ that have a number 1 in their center, you will find in its upper left corner a number equal to the square of the side length of this square. The path of the spiral after it will be an up arrow followed by a right arrow (to ensure the spiral continues in the same pattern). Since $625 = 25^2$, the same thing applies to it, the arrow after it will be up, followed by a right arrow. The correct option is B.

24. مجسم على شكل هرم ثلاثي منتظم له وجه واحد مظلل. تم وضع هذا المجسم على الطاولة بحيث ينطبق الوجه المظلل على المثلث المكتوب عليه $START$. هذا المجسم سيتدحرج على الطاولة من مثلث للمثلث المجاور بالدوران حول أحد الأحرف. على أي مثلث سينطبق الوجه المظلل مرة أخرى للمرة الأولى؟

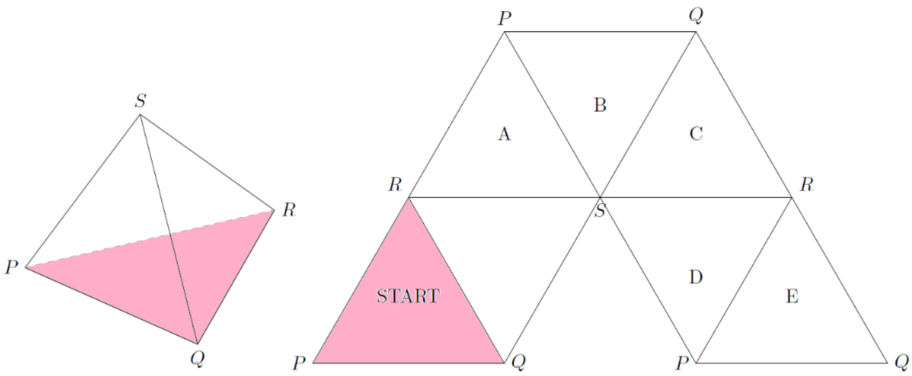


24. A block in the shape of a regular tetrahedron has one face shaded. The shaded face of the block is placed on the board on the triangle labelled $START$. The block is then rolled from one triangle to the next by rotating it about one edge. On which triangle will the block stand for the first time again on its shaded face?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
A	B	C	D	E

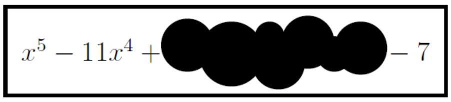
الحل هو (E)

نسمي رؤوس الهرم الثلاثي المنتظم P,Q,R,S. نلاحظ أن P,Q,R هي رؤوس القاعدة المثلثية الشكل في موضع البداية ثم نتتبع تغيير مواضع الرؤوس حسب المسار كما بالشكل التالي. وبذلك سينطبق الوجه المظلل مرة أخرى للمرة الأولى على المثلث E.



Name the vertices of the tetrahedron P, Q, R, S, with P, Q, R being the vertices of the triangle in the starting position. Then we can follow the path of the vertices through the movements as shown in the figure.

25. كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، جزء منها لا يمكن رؤيته بسبب بقعة حبر. إذا كانت الجذور الخمسة لكثيرة الحدود أعدادًا صحيحة، ما أكبر قوة للمقدار $(x-1)$ تقسم كثيرة الحدود؟



25. Part of the fifth degree polynomial shown cannot be seen because of an inkblot. It is known that all five roots of the polynomial are integers. What is the highest power of $(x-1)$ that divides the polynomial?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$(x-1)^1$	$(x-1)^2$	$(x-1)^3$	$(x-1)^4$	$(x-1)^5$

الحل هو (D)

بفرض جذور كثيرة الحدود هي r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. بتكوين كثيرة الحدود بمعلومية جذورها يمكننا الحصول على المعادلة:

$$x^5 - 11x^4 + \ldots - 7 = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)(x-r_5)$$

بمقارنة معاملات الطرف الأيمن مع الطرف الأيسر يمكننا الحصول على $r_1r_2r_3r_4r_5 = 7$. وهذا يعني أن الجذور لا بد أن تنتمي للمجموعة $\{1,-1,7,-7\}$ بشرط تواجد أحد العددين 7 ، -7 ولمرة واحدة فقط. ولأن مجموع الجذور يساوي 11 (وذلك من مقارنة معاملات الطرفين أيضًا)، ولأن $7+1+1+1+1=11$ ، فإن الجذور هي $1,1,1,1,7$. وتكون كثيرة الحدود على الصورة $(x-1)^4(x-7)$.

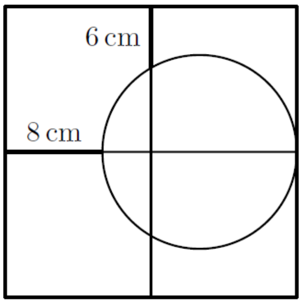
Let r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 be the roots of polynomial. By forming the polynomial, knowing its roots, we can obtain the equation

$$x^5 - 11x^4 + \ldots - 7 = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)(x-r_5)$$

Comparing the coefficients of the right-hand side with the left-hand side, we get the product of the roots is 7 so the roots can only be of the form ± 1, ± 7 (but with exactly one 7 or -7). Also, the sum of the roots is 11. The only way to get 11 as a sum of a ± 7 and (four) ± 1's is $7+1+1+1+1=11$. So the roots are 1 with multiplicity 4 and 7, and so the polynomial is $(x-1)^4(x-7)$

.

26. تم تقسيم المربع الكبير في الشكل التالي إلى أربعة مربعات صغيرة. تمس الدائرة المرسومة الضلع الأيمن في المربع الكبير عند منتصفه. ما طول ضلع المربع الكبير؟ (لاحظ أن الرسم ليس على القياس)



26.The large square in the diagram is dissected into four smaller squares. The circle touches the right hand side of the square at its midpoint. What is the side-length of the large square? Note that the diagram is not drawn to scale.

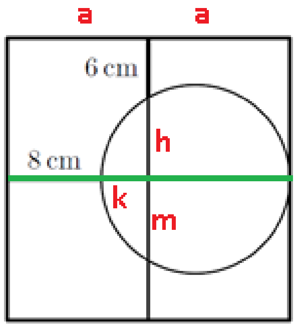
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
18	20	24	28	30

الحل هو (A)

بفرض أن طول ضلع المربع الكبير هو $2a$ وباقي الأطوال كما بالشكل الموضح. من تماس الدائرة مع ضلع المربع الكبير، ووجود زاوية قائمة عند نقطة التماس (لأنها زاوية في المربع الصغير) فإن الوتر الأخضر في الدائرة هو قطر فيها. ولأن قطر الدائرة محور تماثل لها، ومن تعامده مع الوتر الآخر في الدائرة نجد $h=m$. علاوة على ذلك $h=a-6=m\,,\,k=a-8$. الآن من نظرية الوترين المتقاطعين لدينا $a\cdot k=h\cdot m$ ، ومنها

$$a\cdot(a-8)=(a-6)^2$$
$$a^2-8a=a^2-12a+36$$
$$-8a+12a=36$$
$$4a=36$$
$$a=9$$

طول ضلع المربع الكبير يساوي $2\times 9=18$.



Let the side length of the large square is $2a$, the same as the rest of the lengths as shown. Since the circle is tangent to the side of the large square, and there is a right angle at the point of tangency (because it is an angle in the small square), the green chord in the circle is its diameter. And because the diameter of the circle is an axis of symmetry with it, and from its perpendicular to the other chord in the circle, we find $h = m$. Furthermore it $h = a - 6 = m, k = a - 8$. Now from intersecting chords theorem $a \cdot k = h \cdot m$, and then

$$a \cdot (a-8) = (a-6)^2$$
$$a^2 - 8a = a^2 - 12a + 36$$
$$-8a + 12a = 36$$
$$4a = 36$$
$$a = 9$$

Hence the length of the large square is $2 \times 9 = 18$.

27. ما هو القاسم المشترك الأكبر لجميع الأعداد التي على الصورة؛

$$n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3،$$

حيث n عدد طبيعي؟

27. What is the greatest common divisor of all numbers of the form;

$$n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3,$$

where n is a natural number?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$2^9 3^3$	$2^3 3^3 5^3$	$2^6 3^3 5^3$	$2^8 3^2 5^3$	$2^9 3^3 5^3$

الحل هو (E)

عندما $n=1$ فإننا سنحصل على أصغر عدد وهو $1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 4^3\cdot 5^3=2^3\cdot 3^3\cdot 2^6\cdot 5^3=2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$. ومن ثم فإن القاسم المشترك الأكبر سيكون $2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$ أو أحد قواسمه. بما أن حاصل الضرب لأي خمسة أعداد متتالية $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ يحتوي على الأقل عددين من مضاعفات العدد 2 أحدهما من مضاعفات العدد 4، و كذلك يحتوي على الأقل على عدد من مضاعفات العدد 3،

وكذلك يحتوي على عدد من مضاعفات العدد 5.

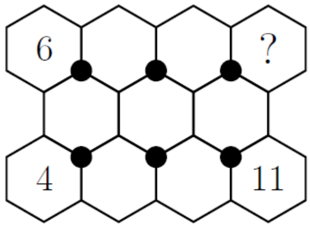
أي أن القاسم المشترك الأكبر لحاصل ضرب خمسة أعداد متتالية هو $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=2^3\cdot 3\cdot 5$.

وبذلك يكون القاسم المشترك الأكبر لجميع الأعداد التي على الصورة $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$ يساوي

$$\left(2^3\cdot 3\cdot 5\right)^3=2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$$

For n = 1 we get the number $1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 4^3\cdot 5^3=2^3\cdot 3^3\cdot 2^6\cdot 5^3=2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$. So the greatest common divisor is $2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$ or some divisor of it. We show that it is actually this number itself. This is because n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) is a run of five consecutive numbers so there are a) at least two multiples of 2 (and one of the two will be a multiple of 4), b) At least one multiple of 3 and c) at least one multiple of 5. So all the numbers are a multiple of at least $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=2^3\cdot 3\cdot 5$. The cube of this, which is $\left(2^3\cdot 3\cdot 5\right)^3=2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$ will be the required answer.

28. نريد وضع الأعداد من 1 إلى 11 داخل الأشكال السداسية بحيث يتساوى مجموع الأعداد الثلاثة حول كل نقطة من النقاط الست. تم وضع ثلاثة من هذه الأعداد بالفعل كما بالشكل. ما العدد الذي يجب وضعه في السداسي الذي يحتوي علامة الاستفهام؟



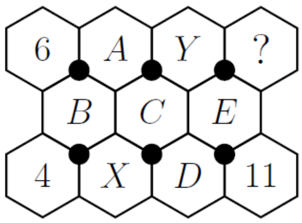
28. The numbers from 1 to 11 are to be placed in the hexagons so that the sum of the three numbers around each of the six black dots is the same. Three of the numbers have already been placed. What number will be placed in the hexagon with a question mark?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	3	5	7	9

الحل هو (E)

نسمي السداسيات كما بالشكل. من النقطتين في أقصى اليسار $A+B+6=X+B+4$ ، ومنها $A+2=X$.

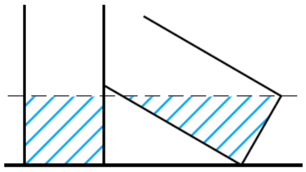
ومن النقطتين في الوسط $A+Y+C=X+D+C$ ، وبالاستفادة من المعادلة $A+2=X$ نجد $A+Y=A+2+D$ ، ومنها $Y=D+2$. ومن النقطتين في أقصى اليمين $Y+E+?=D+E+11$ و بالاستفادة من المعادلة $Y=D+2$ نجد $D+2+?=D+11$ ، ومنها $?=11-2=9$



Let's name the hexagons A,B,C,D,E,X and Y as in the figure. Considering the two leftmost dots we get 6 + A + B = 4 + B + X, so X = A + 2. Considering the two middle dots we get $A+Y+C=X+D+C$, by using

$A+2=X$ we can find $A+Y=A+2+D$, then Y = D + 2, and finally, using the two rightmost dots we get $Y+E+?=D+E+11$, by using $Y=D+2$ we can get $D+2+?=D+11$, then $2+?=11$, so ? = 9.

29. يحتوي خزانان أسطوانيان متطابقان على نفس كمية الماء. يقف أحدهما رأسيا والآخر مائلًا ومستندًا عليه. إذا كان مستوى الماء في كل منهما هو نفسه كما بالشكل، وكانت مساحة القاعدة الدائرية في كل منهما $3\pi\ m^2$. ما حجم(كمية) الماء في كل خزان منهما؟



29. Two identical cylindrical water tanks contain the same amount of water.

One cylinder is standing upright, and the other is leaning against it, and the water level in each of them is the same as in the picture. The bottom of each of the cylinders is a circle with area $3\pi\ m^2$. How much water does each tank contain?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$3\sqrt{3}\pi\ m^3$	$6\pi\ m^3$	$9\pi\ m^3$	$\frac{3\pi}{4}\ m^3$	من المستحيل التحديد من المعلومات المعطاة it's impossible to determine from the information given

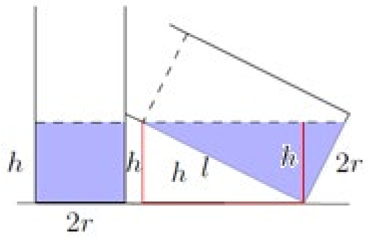
الحل هو (C)

بفرض أن نصف قطر قاعدة الخزان هو r، مساحة القاعدة تساوي $3\pi = \pi r^2$، ومنها $r = \sqrt{3}$. بما أن كمية الماء في الخزان الأيمن تساوي نصف كمية الماء في الخزان لو كان ارتفاع الخزان l، كمية الماء في الخزان الأيمن تساوي كمية الماء في الخزان الأيسر ، يمكننا تكوين المعادلة $\pi r^2 h = \frac{1}{2}\pi r^2 l$، ومنه $h = \frac{1}{2}l$، ومنها $2h = l$. ويصبح المثلث القائم الذي وتره l وأحد ضلعي قائمته h ثلاثيني ستيني، ومن ثم المثلث القائم الذي ضلعي قائمته $l, 2r$ أيضًا ثلاثيني ستيني، وبالتالي

$$l = 2r\cdot\sqrt{3} \Rightarrow 2h = 2r\cdot\sqrt{3} \Rightarrow h = r\sqrt{3}$$

أي أن $h = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$، ويكون حجم الماء في كل خزان يساوي

$$\pi r^2 h = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot 3 = 9\pi.$$



Let the radius the bottom of of the cylinder be r. hence the area of the base is $3\pi = \pi r^2$, then $r = \sqrt{3}$. In the first (upright) cylinder we see the rectangle 2r ×h and in the second (leaning) cylinder we see the right triangle with the cathetuses 2r and ℓ. From symmetry considerations, it is clear that if we pour water into the upright cylinder up to the level ℓ, it will contain twice as much water as the second cylinder (and the first) is containing now. Thus, ℓ = 2h. Therefore the right triangle (pictured) with the cathetus h and hypotenuse ℓ has the angles $30°$ and $60°$ From the right triangle with cathetuses ℓ = 2h and 2r we then obtain $h = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$. So, each cylinder contains 3 · 3π = 9π m^3 of water.

30. حاصل ضرب ستة أعداد صحيحة متتالية هو عدد مكون من 12 خانة على الصورة؛

$$abb\ cdd\ cdd\ abb$$

حيث a و b و c و d أربعة أرقام متتالية (ليس بالضرورة بهذا الترتيب). ما قيمة d؟

30. The product of six consecutive numbers is a 12-digit number of the form;

$$abb\ cdd\ cdd\ abb$$

where the digits a, b, c and d are themselves four consecutive numbers in some order. What is the value of the digit d ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	2	3	4	5

الحل هو (C)

بين أي ستة أعداد متتالية يوجد ثلاثة أعداد زوجية وعدد واحد على الأقل من مضاعفات العدد 5. أي أن حاصل ضرب الأعداد الستة يكون من مضاعفات العدد 10، وهذا معناه أن $b=0$. نستنتج أن a, d, c تساوي $1, 2, 3$ (ليس بالضرورة بهذا الترتيب) أي أن

$$a+c+d=6$$

بين أي ستة أعداد متتالية يوجد عددان من مضاعفات العدد 3. أي أن حاصل ضرب الأعداد الستة يكون من مضاعفات العدد 9. وهذا معناه أن $2a+2c+4d$ من مضاعفات العدد 9. ولكنه يمثل عدد زوجي لذلك

$$a+c+2d=9$$

من المعادلتين $a+c+d=6$ و $a+c+2d=9$ نستنتج أن $d=3$.

Among the six consecutive factors in the product, three of them are even and at least one must be a multiple of 5. Hence the product is a multiple of 10 and so digit b must be zero. Since the digits are consecutive, it follows that a, c and d are equal to 1, 2 and 3, in some order. In particular,

$$a + c + d = 6.$$

Next notice that among the six consecutive factors, two of them must be multiples of 3. Hence the product is a multiple of 9 and so therefore is its digit sum. But the digit sum is also even, since each block of three digits occurs twice, so half the digit sum must also be a multiple of 9. Given that $b = 0$ and the remaining digits are at most 3, we deduce that

$$a + c + 2d = 9.$$

Subtracting the two equations shows that $d = 3$.