الحلول الكاملة لكتيب ثالث متوسط وأول ثانوي 2024

9-10 Junior 2024

إخراج اللجنة العلمية

أ مها الداوود   أ عبد الوهاب الشيخ

أ طارق محمد فضل

إشراف

أ صفوت الطنايني

3 points	ثلاث نقاط

1. ما قيمة المقدار $\frac{2\times 0.24}{20\times 2.4}$؟

1. What is the value of $\frac{2\times 0.24}{20\times 2.4}$?

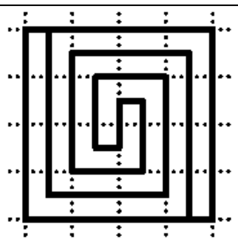
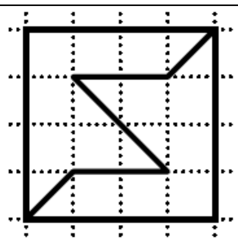
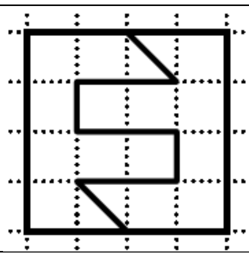
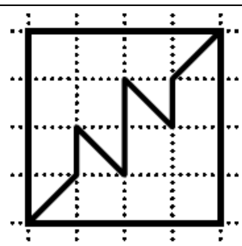
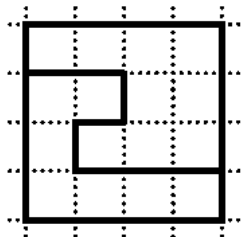
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0.01	0.1	1	10	100

الحل: **A**

$$\frac{2\times 0.24}{20\times 2.4}=\frac{0.48}{48}=0.01$$

2. ما المربع الذي تم تقسيمه إلى قطعتين ليس لهما نفس الشكل؟

2. Which square is split up into two pieces that do not have the same shape?

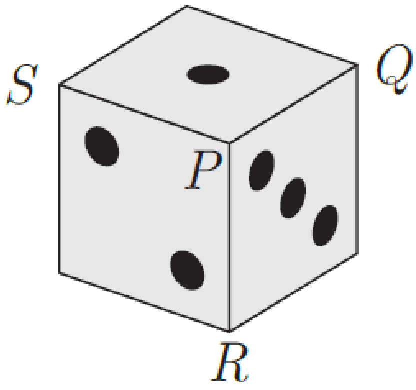
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
				

الحل: **E**

من الواضح أن القطعتين في الشكل **E** مختلفتان في الشكل، وهو مالا يتوفر في باقي الخيارات.

It is clear that the two pieces in shape (E) do not have the same shape, this is not available in the remaining options.

3. مجموع النقاط على الوجهين المتقابلين لحجر النرد يساوي 7 . في الشكل الموضح يتشكل الرأس **P** من تقاطع الوجوه التي تحتوي $1,2,3$ نقاط. مجموع كل رأس هو مجموع عدد النقاط على تلك الوجوه التي تلتقي عند نفس الرأس. فمثلاً مجموع نقاط الرأس **P** هو $3+2+1=6$ نقاط. ما أعلى مجموع لنقاط رأس من الرؤوس **Q** و **R** و **S**؟



3. The number of the dots on opposite faces of a die add to **7**. The vertex labelled P on the die is formed by the faces which have **1, 2 and 3** dots on them. Its vertex sum is the sum of the number of dots on those faces which meet at a given vertex. The vertex sum of P is **1 + 2 + 3 = 6**. What is the maximum of the vertex sums of vertices Q, R and S?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
7	9	10	11	15

الحل: **D**

مجموع نقاط الرأس **Q** = $5+3+1=9$ ، مجموع الرأس **R** = $6+3+2=11$ ومجموع الرأس **S** = $4+2+1=7$.

أعلى مجموع هو 11.

The vertex sum of Q is 1 + 3 + 5 = 9, that of R is 2 + 3 + 6 = 11 and that of S is 1 + 2 + 4 = 7. Hence the maximum is 11.

4. يتم لعب لعبة القفز بالطريقة التالية: يقفز كل لاعب إلى المربعات ويبدّل بين القدم اليسرى – كلا القدمين – القدم اليمنى – كلا القدمين – القدم اليسرى – كلا القدمين، وهكذا، كما هو موضح. لعبت مايا اللعبة وقفزت إلى **48** مربعًا بالضبط وقفزت في البداية بقدمها اليسرى. كم مرة لمست قدمها اليسرى الأرض؟

4. A hopping game is played in the following way: Each player hops into the squares, swapping between left foot - both feet - right foot - both feet - left foot - both feet, and so on, as shown. Maya played the game and hopped into exactly 48 squares starting with her left foot. How many times did her left foot touch the ground?

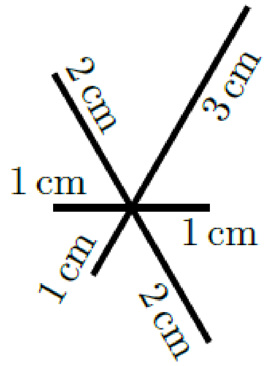
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
12	24	36	40	48

الحل: **C**

تلمس قدم مايا اليسرى الأرض ثلاث مرات من كل أربع خطوات، هذا يعني أنها لمست الأرض $\frac{3}{4}\times 48=36$ مرة.

Maya's left foot touches the ground in three out of every four steps. Therefore, it touches the ground a total of $\frac{3}{4}\times 48=36$ times.

5. يريد تيم رسم الشكل الموضح على قطعة من الورق، دون رفع قلم الرصاص من على الورقة. أطوال الخطوط موضحة في الشكل. يمكنه البدء في الرسم من أي مكان. ما أقصر مسافة يمكن أن يرسمها لإكمال رسم الشكل؟



5. Tim wants to draw the figure shown on a piece of paper, without lifting his pencil off the paper. The lengths of the lines are given in the figure. He can choose to start his drawing anywhere. What is the shortest distance he could draw to complete the figure?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$14cm$	$15cm$	$16cm$	$17cm$	$18cm$

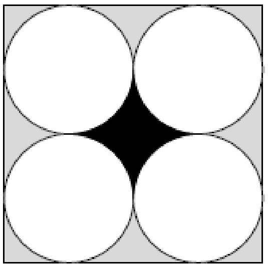
الحل: **B**

أقصر مسافة هي

$$3cm + 2\cdot(1cm + 2cm + 1cm + 1cm) + 2cm = 15cm.$$

The shortest total distance is $3cm + 2\cdot(1cm + 2cm + 1cm + 1cm) + 2cm = 15cm$.

6. يوضح الشكل مربعًا به أربع دوائر متساوية المساحة، كل منها تمس ضلعين للمربع ودائرتين أخريين. ما النسبة بين مساحة المنطقة السوداء ومساحة المنطقة الرمادية؟

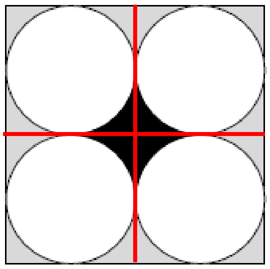


6. The figure shows a square with four circles of equal area, each touching two sides of the square and two other circles. What is the ratio between the areas of the black region and the grey region?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$1:4$	$1:3$	$2:3$	$3:4$	$\pi:1$

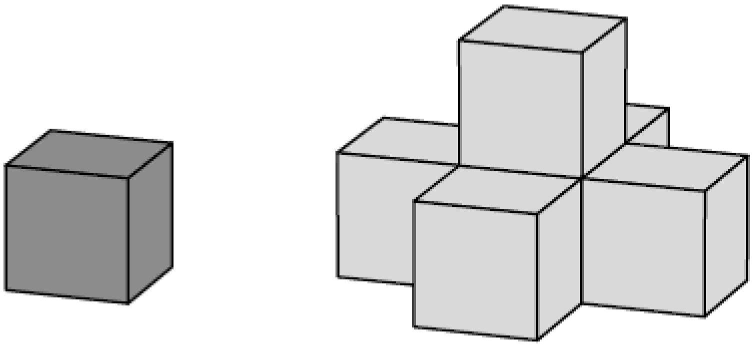
الحل: **B**

يمكن تقسيم الشكل إلى أربعة مربعات صغيرة كل منها يحوي جزءاً واحداً أسود اللون وثلاثة أجزاء رمادية. ولذا فإن النسبة بين مساحة المنطقة السوداء ومساحة المنطقة الرمادية هي 1 إلى 3.



The figure consists of 4 white circles inscribed into a quarter of a square. In each of those quarters, there is one black part and 3 parts of equally big grey area. So the answer is $1:3$.

7. يصنع يحيى سلسلة من الهياكل على الطاولة، بدءًا بمكعب واحد. يقوم بعمل الهيكل التالي بإضافة خمسة مكعبات لإخفاء الوجوه المرئية للمكعب الأول، كما هو موضح. ما أقل عدد من المكعبات يحتاج إلى إضافتها إلى الهيكل الثاني بحيث تكون كل الوجوه المرئية للهيكل الثاني مخفية؟



7. Yahya makes a sequence of structures on a table, beginning with one cube. He makes the next structure by adding five cubes which hide the visible faces of the initial cube, as shown. What is the smallest number of cubes he needs to add to the second structure so that all the visible faces of the second structure are hidden?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
8	9	10	13	19

الحل: **D**

يحتاج يحيى إلى 5 مكعبات لتغطية الوجوه المرئية للمكعب العلوي، ويحتاج 8 مكعبات لتغطية الوجوه المرئية للمكعبات الموجودة في الطبقة السفلى، فيكون مجموع المكعبات التي يحتاجها 13 مكعبًا.

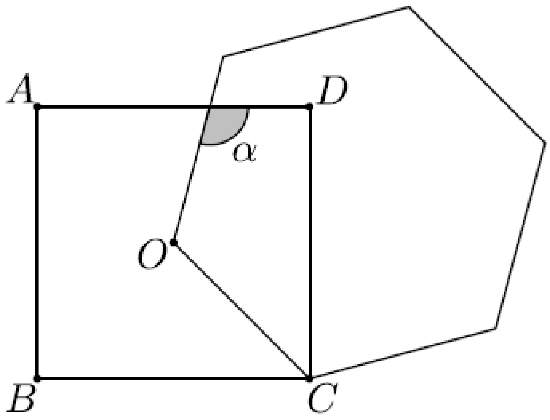
Yahya needs 5 cubes to cover the faces of the top cube and 8 cube on the ground level. It makes 13 cubes in total.

8. العدد المتناظر المكون من ثلاثة أرقام هو عدد على الشكل "aba" حيث يمكن أن يكون الرقمان a و b متساويين أو مختلفين. ما هو مجموع أرقام أكبر عدد متناظر مكون من ثلاثة أرقام وفي نفس الوقت من مضاعفات 6؟
8. A three-digit palindrome is a number of the form ’aba’ where the digits a and b can either be the same or different. What is the sum of the digits of the largest three-digit palindrome that is also a multiple of 6?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
16	18	20	21	24

الحل: **E** لكي يكون العدد من مضاعفات 6 يجب أن يكون الآحاد زوجياً، ويكون مجموع أرقامه من مضاعفات 3، ولذا فإن أكبر عدد متناظر يحقق الشروط هو 888، ومجموع أرقامه هو $24 = 8 + 8 + 8$.
If it is a multiple of 6, it must be even and its digits must add up to a multiple of three. It must start with 8 to also end in 8, the largest of which is 888 and the sum is $8 + 8 + 8 = 24$.

9. يرسم محمد مربعًا رؤوسه **A**، **B**، **C**، **D** وشكلًا سداسيًا منتظمًا أحد أضلاعه **OC**، حيث **O** هو مركز المربع. ما هو قياس الزاوية **α**؟				



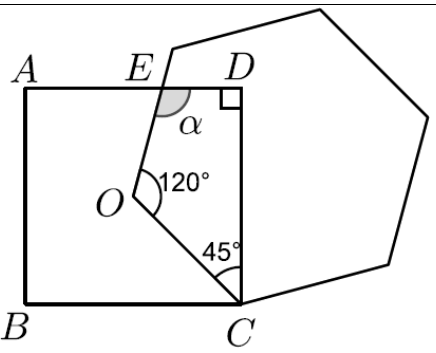
9. Mohammed draws a square with vertices A, B, C, D and a regular hexagon with side OC, where O is the center of the square. What is the size of angle α?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
105°	110°	115°	120°	125°

الحل: **A**

ليكن رأس الزاوية المطلوبة هو E . في الرباعي $OCDE$: $m\angle C = 45^\circ$ (لأن قطر المربع ينصف زاوية الرأس). $m\angle D = 90^\circ$ (الزاوية الداخلية في المربع). $m\angle O = 120^\circ$ (الزاوية الداخلية في السداسي المنتظم). وبالتالي يكون:

$\alpha = 360^\circ - (45^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 105^\circ$.



Let E be the vertex of the requested angle. Look at the angles of the quadrilateral OCDE. The angle in C is 45° (angle between side and diagonal of a square). The angle at D is a right angle. The angle at O is 120° (angle of the regular hexagon). Therefore $\alpha = 360^\circ - (45^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 105^\circ$.

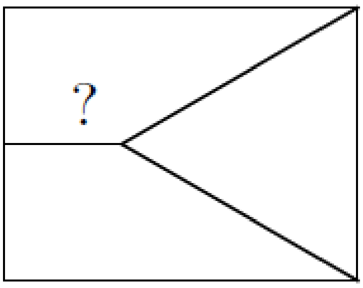
10. يحيط آدم حقلًا مستطيلًا بسياج يبلغ طوله **40** مترًا. إذا كانت أطوال أضلاع الحقل كلها أعداد أولية. ما أكبر مساحة ممكنة للحقل بالمتر المربع؟
10. Adam encloses a rectangular field with 40 m of fence. The side-lengths of the field are all prime numbers. What is the maximum possible area of the field in squar meters?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
99	96	91	84	51

الحل: **C** محيط الحقل يساوي $40 = \mathbf{2}(l + w)$، وعليه فإن $l + w = 20$ ، حيث l, w عددان أوليّان. توجد حالتان ممكنتان $(l, w) = (3,17)$ أو $(l, w) = (7,13)$. أكبر مساحة ممكنة هي $7 \times 13 = 91\ m^2$.
Perimeter of the fence $40 = \mathbf{2}(l + w)$, so $l + w = 20$. Both l *and* w are prime numbers. There are 2 possible pairs $(l, w) = (3,17)$ *or* $(7,13)$. Maximum possible area is $7 \times 13 = 91\ m^2$.

4 points	أربع نقاط

11. تم تقسيم مستطيل إلى ثلاث مناطق متساوية المساحة. إحدى المناطق على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه **4**، والمنطقتان الأخريان على شكل شبه منحرف، كما هو موضح في الشكل. ما طول القاعدة الصغرى لشبه المنحرف؟



11. A rectangle is divided into three regions of equal area. One of the regions is an equilateral triangle with side-length 4, the other two are trapezia, as shown in the figure. What is the length of the smaller of the parallel sides of the trapezia?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	3	$2\sqrt{3}$

الحل: **B**

ارتفاع المثلث هو $2\sqrt{3}$. وعليه تكون مساحة المثلث تساوي $\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. ولأن المستطيل مكون من **3** مناطق متساوية في المساحة، فإن مساحة المستطيل تساوي $12\sqrt{3} = 3\times 4\sqrt{3}$. ولأن عرض المستطيل تساوي 4 فإن طوله تساوي $\frac{12\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$. وبالتالي فإن طول القاعدة الصغرى في شبه المنحرف تساوي $3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

The altitude of the triangle $2\sqrt{3}$, so its area is $\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. The area of the rectangle is then $3\times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$. Then its length is $\frac{12\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$. So, the length of the smallest parallel side of the trapezia is $3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

12. تضع آية الأحرف **A** و**B** و**C** و**D** في الجدول 4×2 الظاهر في الشكل. يتم وضع حرف واحد فقط في كل خلية. تريد آية التأكد من أنه في كل صف وفي كل مربع من المقاس 2×2 يظهر كل من الأحرف الأربعة مرة واحدة بالضبط. بكم طريقة يمكنها أن تفعل هذا؟

12. Ayah places the capital letters A, B, C and D into the 2 × 4 table shown in the figure. Exactly one letter is placed in each cell. She wishes to make sure that in each row and in each 2 × 2 square, each of the four letters appears exactly once. In how many ways can she do this?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
12	24	48	96	198

الحل: **B**

في الصف الأول، عدد طرق ترتيب الحروف الأربعة بدون تكرار هو $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$. في الصف الثاني، يجب أن يكون المربع الثاني مختلفاً عن المربع الأول والثاني والثالث من الصف الأول، ولذا يجب أن يكون الحرف في المربع الثاني من الصف الثاني مماثلاً للحرف الموجود في المربع الرابع من الصف الأول. وبنفس الطريقة سنجد أن ترتيب الحروف في الصف الثاني يتحدد بشكل فريد حسب ترتيب الحروف في الصف الأول. ولذا فإن عدد الطرق الممكنة يساوي 24 .

The letters A, B, C and D can be arranged freely in the four squares of the first row. There are four options for the first letter, then three options for the second square and two for the third square. That is $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ options. Having filled the first row, consider the second square of the second row. This can't be the letter in the first or second or third position of the first row. So, it must be the same letter as in the fourth position. Therefore, the second row is uniquely defined by the first row and there are 24 options.

13. يقطع سامي ثلاث دوائر من ثلاث بطاقات ملونة مختلفة. يضعهم فوق بعضهم البعض، كما هو موضح في الشكل**1**. ثم ينقل الدوائر بحيث تكون الدوائر الثلاث جميعها متماسة مع بعضها البعض، كما هو موضح في الشكل**2**. في الشكل الأول تبلغ مساحة المنطقة السوداء المرئية سبعة أمثال مساحة الدائرة البيضاء. ما هي النسبة بين مساحتي المنطقة السوداء المرئية في الشكلين؟

شكل 1

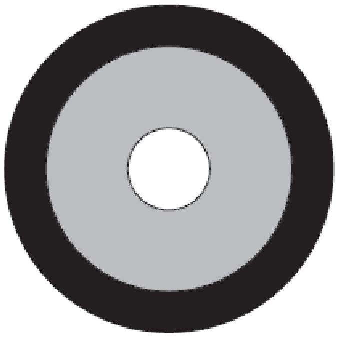


Fig 1

شكل 2

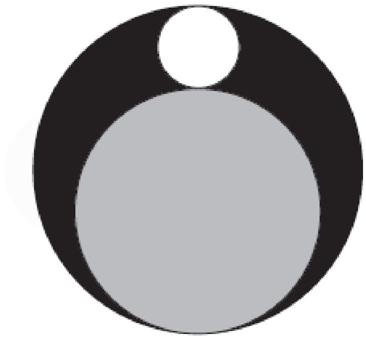


Fig 2

13. Sami cuts out three circles from three different pieces of coloured card. He places them on top of each other, as shown in Figure 1. He then moves the circles so that all three circles are tangent to each other, as shown in Figure 2. In the first figure, the area of the visible black region is seven times the area of the white circle. What is the ratio between the areas of the visible black regions in the two figures?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$3:1$	$4:3$	$6:5$	$7:6$	$9:7$

الحل: **D**

لتكن مساحة الدائرة البيضاء تساوي w . من المعطيات فإن مساحة المنطقة السوداء في الشكل الأول تساوي $7w$. مساحة المنطقة السوداء في الشكل الثاني تساوي مساحة المنطقة السوداء في الشكل الأول محذوفاً منها مساحة الدائرة البيضاء هي $7w - w = 6w$.
وبالتالي تكون النسبة بين المنطقتين السوداوين هي $7:6$.

Let the area of white, black and grey circles respectively be w, b, g . Also, if the visible black area in figure 1 are $A_1 = b - g = 7w$, and in figure 2, $A_2 = b - w - g = 7w - w = 6w$ (note that $w < g$). The ratio between the areas of the visible black regions in the two figures $7:6$.

14. أنجبت ابنة مريم طفلة اليوم. بعد عامين سيكون حاصل ضرب أعمار مريم وابنتها وحفيدتها **2024**. إذا كان عمر كل من مريم وابنتها أعداد زوجية. ما هو عمر مريم الآن؟
14. Mariam's daughter gave birth to a baby girl today. In two years' time, the product of the ages of Mariam, her daughter and her granddaughter will be 2024. Mariam's and her daughter's ages are both even numbers. What is Mariam's age now?

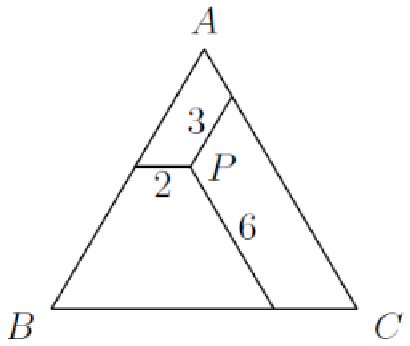
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
42	44	46	48	50

الحل:**B**

بعد عامين سيصبح عمر الحفيدة تساوي 2 سنة. ليكن عمر مريم حينها تساوي $2m$، وعمر ابنتها تساوي $2d$. حاصل ضرب الأعمار الثلاثة تساوي $2\cdot(2d)\cdot(2m)$. وبمقارنتها مع تحليل 2024 إلى عواملها الأولية $2024=2\times(2\cdot 11)\times(2\cdot 23)$، نجد أن عمر مريم بعد سنتين هو $2\cdot 23=46$، وبالتالي فإن عمرها الآن 44.

The granddaughter will be 2 years old in two years time. Let Mariam have the age of $2m$ and her daughter's age be $2d$. The product of the ages must be $2\cdot(2d)\cdot(2m)$. We compare this with the prime factorization of $2024=2\times(2\cdot 11)\times(2\cdot 23)$. So Mariam will be 46 in two years time, making her age now 44.

15. اختيرت النقطة **P** داخل مثلث متطابق الأضلاع. رُسم من النقطة **P** ثلاث قطع مستقيمة موازية لأضلاع المثلث، كما هو موضح في الشكل. إذا علمت أن أطوال القطع هي $2m, 3m, 6m$. ما هو محيط المثلث؟

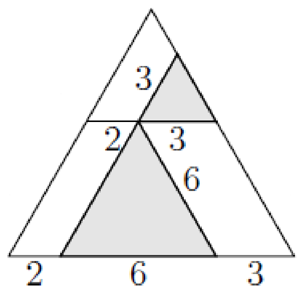


15. A point P is chosen inside an equilateral triangle. From P we draw three segments parallel to the sides, as shown. The lengths of the segments are $2m, 3m$ *and* $6m$. What is the perimeter of the triangle?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$22m$	$26m$	$33m$	$39m$	$44m$

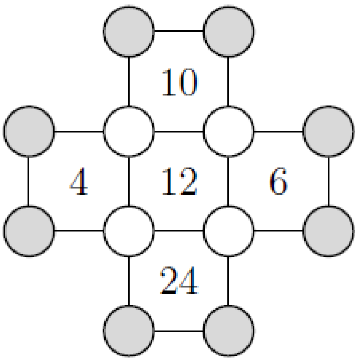
الحل: **C**

عند مد أحد القطع المتقاطعة في P على استقامته سيتكون عندنا مثلث متطابق الأضلع وشكلين متوازيي الأضلاع. وبالتالي سيكون طول ضلع المثلث الكبير يساوي $2m + 3m + 6m = 11m$ ، ويكون محيط المثلث الكبير يساوي $3 \times 11 = 33m$.



Extend one segment through P. We have an equilateral triangle and parallelogram. The sides of the original triangle have length $2m + 3m + 6m = 11m$. So, the perimeter of the triangle is $33m$.

16. تتم كتابة عدد في كل من الدوائر الاثني عشر المعروضة. العدد المكتوب داخل كل مربع هو حاصل ضرب الأعداد في رؤوسه الأربعة. ما هو ناتج ضرب الأعداد في الدوائر الرمادية الثمان؟

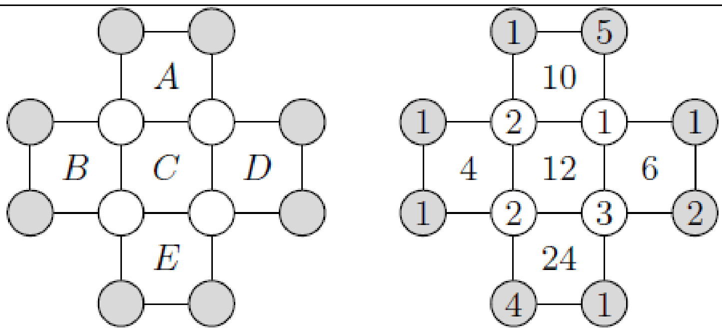


16. A number is written in each of the twelve circles shown. The number inside each square indicates the product of the numbers at its four vertices. What is the product of the numbers in the eight grey circles?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
20	40	80	120	480

الحل: **B**

العدد المكتوب داخل كل مربع هو حاصل ضرب الأعداد في الدوائر الموجودة في رؤوسه الأربعة. لاحظ أن الدوائر الرمادية تدخل في ناتج الضرب لمربع واحد، بينما تدخل الدوائر البيضاء في ناتج ضرب مربعين اثنين. وبالتالي فإن حاصل ضرب الدوائر الرمادية هو $\frac{4\times 24\times 6\times 10}{12^2}=40$، تُظهر الصورة مثالاً مع إنشاء محتمل.



If the products inside the squares are A, B, C, D, E, then the required product is $\frac{ABDE}{C^2}=\frac{4\times 24\times 6\times 10}{12^2}=40$. This is because the numbers in grey circles are included once each at the products A, B, D and E and those in white circles show up twice each. The picture shows an example with a possible construction.

17. هناك أربع مزهريات على الطاولة، تم وضع عدد من الحلويات فيها. عدد الحلويات في المزهرية الأولى يساوي عدد المزهريات التي تحتوي على قطعة حلوى واحدة. عدد الحلويات في المزهرية الثانية يساوي عدد المزهريات التي تحتوي على قطعتين من الحلوى. عدد الحلويات في المزهرية الثالثة يساوي عدد المزهريات التي تحتوي على ثلاث قطع حلويات. عدد الحلويات في المزهرية الرابعة يساوي عدد المزهريات التي عدد الحلويات فيها صفر (الخالية من الحلويات). كم عدد الحلويات في جميع المزهريات؟

17.There are four vases on the table in which a number of sweets have been placed.The number of sweets in the first vase is the number of vases that contain one sweet.The number of sweets in the second vase is equal to the number of vases that contain two sweets. The number of sweets in the third vase is equal to the number of vases that contain three sweets. The number of sweets in the fourth vase is equal to the number of vases that contain zero sweets. How many sweets are in all the vases together?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2	3	4	5	6

الحل: **C**

إذا كان في أي من المزهريات الأربع أكثر من **4** حلويات فإن ذلك سيؤدي إلى تناقض لأنه لا يوجد سوى **4** مزهريات. إذا كان هناك **4** حلويات في واحدة من المزهريات الأربعة، فسيؤدي ذلك إلى تناقض لأن هذه المزهرية نفسها تحتوي على عدد مختلف من الحلويات. لذلك لا يوجد سوى مزهريات تحتوي على **0** أو **1** أو **2** أو **3** حلويات. إجمالي عدد الحلويات يساوي عدد المزهريات. هناك على الأقل توزيعان محتملان في أربع مزهريات: **2**، **1**، **0**، **1** أو **0**، **2**، **0**، **2**.

If in any of the 4 vases would be more than 4 sweets that would lead to a contradiction because there are only 4 vases. If there were 4 sweets in one of the 4 vases, it would lead to a contradiction because this vase itself contains a different number of sweets. So there are only vases with 0, 1, 2 or 3 sweets. The total number of sweets is equal to the number of vases. There are at least two possible distributions in four vases: 2, 1, 0, 1 or 0, 2, 0, 2**.**

18. لدى جاسم n^3 من المكعبات الصغيرة المتطابقة، حيث $(n>2)$. استخدمت هذه المكعبات لصنع مكعب كبير وقام بتلوين السطح الخارجي للمكعب الكبير من جميع الجهات. عدد المكعبات الصغيرة التي تم تلوين وجه واحد فقط منها يساوي عدد المكعبات الصغيرة التي لم يتم تلوين أي وجه منها. ما هي قيمة n ؟

18. Jassem has $n^3 (n>2)$, identical small cubes. He used these to make a large cube and painted the entire outer surface of the large cube. The number of small cubes with only one face painted is equal to the number of those with no face painted. What is the value of n ?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4	6	7	8	10

الحل: **D**

عدد المكعبات الصغيرة التي تم تلوين وجه واحد فقط منها هو $6(n-2)^2$ ، عدد المكعبات الصغيرة التي لم يتم تلوين أي وجه منها هو $(n-2)^3$. من المعطيات: $6(n-2)^2 = (n-2)^3 , n > 2$. وهذا يعني أن $n=8$.

There are $(n-2)^2$ small cubes with a single painted face visible on each face of the large cube; so the total number is $6(n-2)^2$. There are $(n-2)^3$ cubes without any outer face and the big cube. From $6(n-2)^2 = (n-2)^3 , n > 2$ we deduce $n=8$.

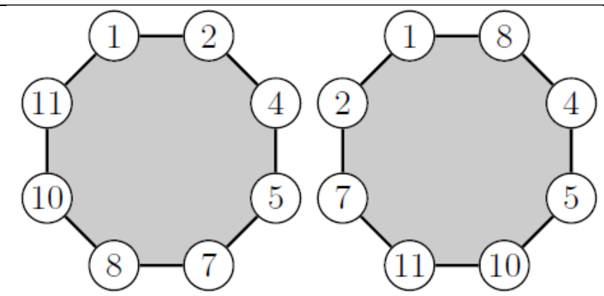
19. لدى آمنة مجموعة من البطاقات المرقمة بالأعداد من 1 إلى 12. تضع ثمانية منها في رؤوس مضلع ثماني بحيث يكون مجموع كل زوج من الأعداد على طرفي كل ضلع من أضلاع الثماني من مضاعفات العدد 3. ما هي الأعداد التي لم تضعها آمنة؟

19. Amnah has a set of cards numbered 1to12. She places eight of them at the vertices of an octagon so that the sum of every pair of numbers at opposite ends of an edge of the octagon is a multiple of 3. Which numbers did Amnah not place?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1,5,9,12	3,5,7,9	1,2,11,12	5,6,7,8	3,6,9,12

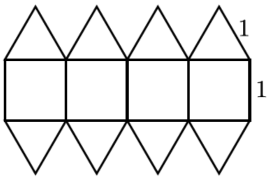
الحل: **E**

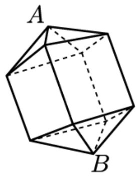
إذا كان أحد الرؤوس يحوي عدداً من مضاعفات 3 فإن جميع الرؤوس المجاورة له لا بد أن تحوي أعداداً من مضاعفات 3، ولكننا نملك فقط أربعة مضاعفات للعدد 3، وبالتالي فإننا يجب أن نستبعد مضاعفات 3 وهي 3,6,9,12. في الشكل أدناه توزيعان محتملان للأعداد.



If one of the numbers at a vertex is a multiple of 3 then the number at EVERY neighbouring vertex must also be a multiple of 3. Since we have only 4 multiples of 3 we come to a contradiction. So, the numbers 3, 6, 9, 12 must be removed. Two possible constructions are given above.

20. يصنع يونس شبكة باستخدام مزيج من المربعات والمثلثات متطابقة الأضلاع، كما في الشكل. طول الضلع لكل مربع وكل مثلث هو $1cm$. طوى يونس الشبكة لتكوين الشكل ثلاثي الأبعاد الموضح. ما المسافة بين الرأسين **A** و **B**؟



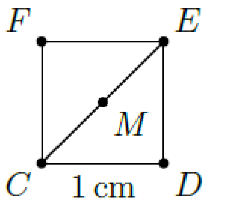


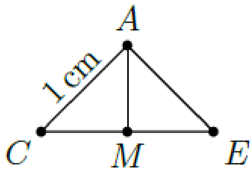
20. yonis makes a net using a combination of squares and equilateral triangles, as show in the figure. The side-length of each square and of each triangle is 1 cm. He folds the net up into the 3D shape shown. What is the distance between the vertices A and B?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\sqrt{5}\,cm$	$(1+\sqrt{2})cm$	$\frac{5}{2}cm$	$(1+\sqrt{3})cm$	$2\sqrt{2}\,cm$

الحل: **B**

لتكن رؤوس المربع المتصلة بالنقطة A هي $CDEF$ وطول ضلع المربع تساوي $1\ cm$. باستخدام فيثاغورس فإن طول قطر المربع $\sqrt{2}cm = CE$. لتكن M منتصف القطر CE، المثلث ACM قائم الزاوية فيه $AC = 1cm, CM = \frac{\sqrt{2}}{2}cm$. من نظرية فيثاغورس $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = |Am|$. وبالتالي فإن $AB = 1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}cm$.



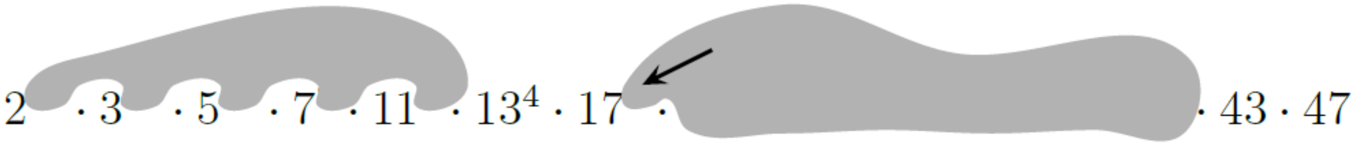


The 4 vertices joined to A form a square $CDEF$ of side $1\ cm$ long. Therefore, by the Pythagorean theorem, its diagonal CE is $\sqrt{2}cm$ long. Let M be the midpoint of CE. Then AMC is a right triangle with hypotenuse AC of side $1\ cm$ and leg CM of side $\frac{\sqrt{2}}{2}cm$.

Again, using the Pythagorean theorem, we get $|Am| = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. The distance between A and B is $1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}cm$.

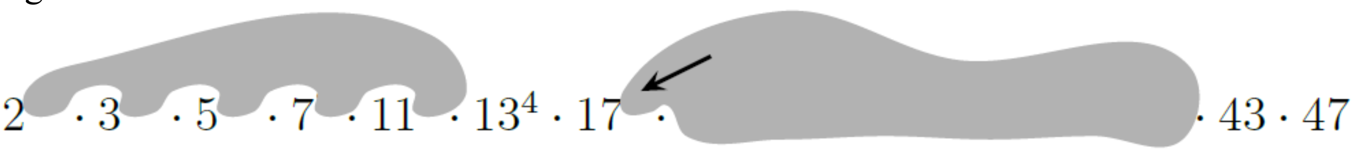
5 points	**خمس نقاط**

21. التحليل الأولي للعدد $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ يكتب كما هو موضح في الشكل:



حيث يتم كتابة الأعداد الأولية بترتيب تصاعدي. غطى الحبر بعض الأعداد الأولية وبعض الأسس. ما هو أس العدد 17؟

21. The prime factorisation of the number $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ is of the form shown in the diagram:



The primes are written in increasing order. Ink has covered some of the primes and some of the exponents. What is the exponent of **17**?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	2	3	4	5

الحل: **C**

أكبر عامل أولي في التحليل هو 47 ، وبالتالي فإن $47 \le n < 53$ ، وإلا ظهر العامل الأولي التالي 53 في التحليل. 13^4 موجودة في التحليل وهذا يعني دخول أربعة مضاعفات للعدد 13 في $n!$ وهذه المضاعفات هي $13, 26, 39, and\ 52$ وبالتالي فإن $n=52$.
توجد ثلاثة مضاعفات للعدد 17 أقل من 52 وهي $17, 34, 51$، وبالتالي فإن أس العدد 17 هو 3 .

The appearance of the prime 47 shows that $47 \le n < 53$ (else we would see the next prime 53). Since 13^4 is part of the factorization, four multiples of 13 are included in $n!$. These are $13, 26, 39, and\ 52$, so $n=52$. There are three multiples of 17 before 52 (these are $17,\ 34\ and\ 51$). Therefore, the exponent of 17 in this factorization is 3 .

22. يكون كمال خلال اليوم دائمًا صادقًا، وفي اليوم التالي يكون دائمًا كاذبًا، وفي اليوم التالي يكون دائمًا صادقًا، وهكذا. ذات يوم، قال بالضبط أربعًا من الجمل الخمس التالية. أي جملة لا يمكن أن يكون قالها في ذلك اليوم؟

(A)	لقد كذبت أمس وسأكذب غدًا.
(B)	أنا أقول الحقيقة اليوم وسأقول الحقيقة غدًا .
(C)	**2024** يقبل القسمة على **11**.
(D)	أمس هو يوم الأربعاء.
(E)	غدًا هو يوم السبت.

22. One day Kamal is always telling the truth, the next day he is always lying, the next day he is always telling the truth, and so on. One day, he made exactly four of the following five statements. Which one *could he not* have made on that day?

(A)	I lied yesterday and I will lie tomorrow.
(B)	I am telling the truth today and I will tell the truth tomorrow.
(C)	**2024** is divisible by **11**.
(D)	Yesterday was Wednesday.
(E)	Tomorrow will be Saturday.

الحل: **C**

العبارة **(B)** لا يقولها إلا شخص كاذب، والعبارتان **(D),(E)** يستحيل أن تكونا صحيحتان في الوقت نفسه، وبالتالي فإن لدينا عبارتين كاذبتين. وبالتالي فإن كمال في هذا اليوم كاذب دائماً. العبارة الصحيحة الوحيدة التي لم يقلها كمال اليوم هي **(C)**.

Statement (B) can only be made by a person who lies on that day. Looking at the statements (D) and (E), they cannot both be true. Therefore, we have at least two statements that are lies. This means that Carl is lying today, so he couldn’t make the statement (C).

23. مجموع أرقام العدد N يساوي ثلاثة أمثال مجموع أرقام العدد N +1. ما هو أصغر مجموع ممكن لأرقام العدد N؟

23. The sum of the digits of the number N is three times the sum of the digits of the number N +1. What is the smallest possible sum of the digits of N?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	12	15	18	27

الحل: **B**

لأن مجموع أرقام العدد $N+1$ أقل من مجموع أرقام العدد N، فهذا يعني أن خانة الآحاد للعدد N هي 9. وحينها ستصبح خانة الآحاد للعدد $N+1$ هي صفر وتزداد خانة العشرات بمقدار 1. أي أن مجموع أرقام العدد $N+1$ أكبر من مجموع أرقام العدد N بمقدار 8 ليكن مجموع أرقام العدد N هو x، بالتالي سيكون

$$x = 3(x-8) \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12.$$

العدد **39** أصغر عدد له الخاصية هذه، بينما **...129, 219** أكبر منه وله نفس الخاصية.

The sum of the digits of a number decreases only if the number has the last digit 9, so that the next number ends in 0, and 1 is added to its penultimate digit. In that case, the sum of the digits of the number $N+1$ decreases by 8, compared to that of the number N. At the same time, it is three times smaller than the sum of the digits of N. Denoting the sum of the digits of N by x, we have

$$x = 3(x-8) \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12.$$

The number 39 is the smallest number that has this property, while 129, 219... are larger than it and have the same property.

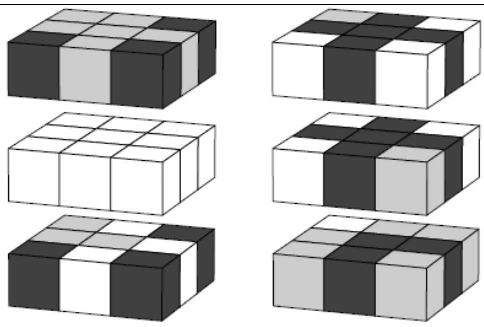
24. لدى جنى بعض مكعبات الوحدة السوداء والرمادية والبيضاء. تستخدم 27 منهم لبناء مكعب $3 \times 3 \times 3$. تريد جنى أن يكون السطح الخارجي ثلثه أسود، وثلثه رمادي، وثلثه أبيض. أصغر عدد ممكن من المكعبات السوداء التي يمكن أن تستخدمها يساوي **A**، وأكبر عدد ممكن من المكعبات السوداء التي يمكن أن تستخدمها يساوي **B**. ما هي قيمة **B - A**؟

24. jana has some black, gray, and white unit cubes. She uses 27 of them to build a $3 \times 3 \times 3$ cube. She wants the surface to be exactly one-third black, one-third gray, and one-third white. The smallest possible number of black cubes she can use is A and the largest possible number of black cubes she can use is B. What is the value of B − A?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	3	6	7	9

الحل: **D**

مساحة سطح المكعب تساوي $6 \cdot 3^2 = 54$، وهذا يعني أن المساحة الظاهرة لكل لون تساوي 18. كل مكعب صغير يوضع في ركن المكعب الكبير ستظهر منه 3 أوجه، وكل مربع صغير يوضع في حافة المكعب الكبير سيظهر منه وجهان، وعند وضع المكعب الصغير في وسط أوجه المكعب الكبير سيظهر منه وجه واحد، أما المكعب المخفي في مركز المكعب الكبير فلا يظهر منه أي وجه. في المكعب $3 \times 3 \times 3$: لدينا 8 أركان، 12 مكعب في الحواف، 6 مكعبات في وسط الأوجه ومكعب 1 مخفي في مركز المكعب الكبير. أصغر عدد ممكن من المكعبات السوداء تساوي $A = 6$ أركان. أكبر عدد ممكن من المكعبات السوداء تساوي $B = 13$ كالتالي: 6 حواف، 6 في مراكز الوجوه، و 1 مخفي في مركز المكعب الكبير. وبالتالي: $B - A = 7$.



The surface area of the cube is $6 \cdot 3^2 = 54$. This means that the black, the grey and the white area should equal to 18 each. Each unit cube can contribute 3 if it is a corner cube, 2 if it is an edge cube, 1 if it is a center of a face, and 0 if it is a center of cube.
There are 8 corner cubes, 12 edge cubes and 6 centers of faces. 1 unit cube is completely hidden from the surface. The smallest number of unit cubes to make area of 18 is A = 6 corner cubes. The largest number of unit cubes to make area of 18 is 13: 6 centers of faces, 6 edge cubes and 1 “hidden” unit cube. So, we would have used B = 13 black unit cubes. $B - A = 7$.

25. قامت أنوار برمي حجر نرد 24 مرة. ظهرت جميع الأرقام من 1 إلى 6 مرة واحدة على الأقل. الرقم 1 ظهر مرات أكثر من أي رقم آخر. قامت أنوار بجمع كل الأرقام التي ظهرت. المجموع الذي حصلت عليه كان أكبر مجموع يمكن الحصول عليه. ما هو المجموع الذي حصلت عليه؟				
25. Anwar rolled a normal die 24 times. All numbers from 1 to 6 came up at least once. The number 1 came up more times than any other number. Anwar added up all the numbers. The total she obtained was the largest one possible. What total did she obtain?				
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
83	84	89	90	100

الحل: **D**

بما أن كل رقم ظهر مرة واحدة على الأقل، فسيكون مجموع 6 رميات هو $6+5+4+3+2+1=21$. تبقت 18رمية، يجب أن يظهر فيها الرقم 1 أكثر من باقي الأرقام، وليكن المجموع أكبر ما يمكن فيجب أن تظهر الأرقام 6,5,4 بأكبر ما يمكن بشرط أن لا تتجاوز عدد مرات ظهور الرقم 1. ولذا أكبر مجموع ممكن عندما يظهر الرقم 1 مرات عددها 6، الرقمان 6,5 مرات عددها 5 لكل منهما، والرقم 4 مرات وعددها 2. فيكون المجموع $21+6(1)+5(6)+5(5)+2(4)=90$.

Since Ann has rolled each number at least once, we can guarantee that 6 of the rolls have a sum of $1+2+3+4+5+6=21$. Let's consider the remaining 18 rolls. There should be more 1s than any other numbers. It is clear that the number of 6s rolled should be one less than the number of 1s. If we have 7 1s: then 6 6s adding 5 5s we get $7+36+25=68$. If we have 6 1s: then 5 6s, 5 5s and adding 2 4s we get $6+30+25+8=69$. This leads to a max total of 90. Further reduction of 1s does not increase the maximum possible sum.

26. سارت فاطمة في الحديقة. سارت نصف إجمالي الوقت بسرعة $2km/h$. سارت نصف إجمالي المسافة بسرعة $3km/h$. سارت بقية الوقت بسرعة $4km/h$. ما هو الكسر الدال على الوقت الذي تسير فيه بسرعة $4km/h$ من إجمالي الوقت؟

26. Fatmah walked in the park. She walked half of the total time at a speed of $2km/h$. She walked half of the total distance at a speed of $3km/h$. She walked the rest of the time at a speed of 4 km/h. For what fraction of the total time did she walk at a speed of $4km/h$?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

الحل: **A**

لنفرض أن إجمالي الوقت الذي قضته فاطمة في المشي هو T ونصف الوقت هو t (هذا يعني أن $T = 2t$) . والوقت الذي سارت فيه بسرعة $4km/h$ هو x وبالتالي يكون الوقت سارت فيه بسرعة $3km/h$ هو $t - x$. بالتالي يكون لدينا التالي:

السرعة $2km/h$، الزمن t. إذن المسافة $2t$.

السرعة $3km/h$ ، الزمن $t - x$. إذن المسافة $3(t - x)$.

السرعة $4km/h$ ، الزمن x . إذن المسافة $4x$.

ولدينا أن:

$$3(t-x) = 2t + 4x \Leftrightarrow t = 7x \Leftrightarrow T = 14x, therefore\, x = 1/14(T)$$

Let's denote the time of Fatmah's walk with T and half of the time for Fatmah's walk with t, (T=2t) and the time she walks with a speed of 4 km/h with x. Then, the time she walks with a speed of 3 km/h is t − x. We have thefollowing:

$$Speed: \ 2\ km/h,\ Time: t,\ Distance:\ 2t$$

$$Speed: \ 3\ km/h,\ Time: t-x,\ Distance:\ 3(t-x)$$

$$Speed: \ 4\ km/h,\ Time: x,\ Distance:\ 4x$$

Then we have

$$3(t-x) = 2t + 4x \Leftrightarrow t = 7x \Leftrightarrow T = 14x$$

$$Therefore, x = 1/14\left(T\right)$$

That is, 1/14 of the time was spent walking with a speed of 4 km/h.

27. يريد علي إزالة بعض الأعداد الصحيحة من 1 إلى 25 ، ثم فصل الأعداد المتبقية إلى مجموعتين بحيث يكون حاصل ضرب الأعداد في كل مجموعة متساوي. ما هو أصغر عدد من الأعداد التي يمكن أن يزيلها علي؟

27. Ali wants to remove some of the integers from 1 to 25 and then separate the remaining numbers into two groups so that the products of the integers in each group are equal. What is the smallest number of integers Ali could remove?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4	5	6	7	8

الحل: **B**

الفكرة أن يكون توزيع العوامل الأولية في المجموعتين متساوي. ولذا فإن العوامل الأولية التي لها مضاعف واحد فقط من 1 إلى 25 يجب استبعادها، ولذا سنستبعد **13,17,19,23** و الرقم 7 له ثلاثة مضاعفات هي 7,14,21 فيجب استبعاد أحدها وهو العدد 7.

الأعداد المتبقية يمكن تقسيمها في مجموعتين لهما نفس حاصل الضرب، وعلى سبيل المثال:

$$3\cdot5\cdot8\cdot14\cdot15\cdot18\cdot20\cdot22\cdot24 = 2\cdot4\cdot6\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot16\cdot21\cdot25$$

Thinking of the prime factorizations of the products of the numbers of both groups, they have to be the same, since the products are equal. Therefore, prime numbers that have only one multiple among the numbers from 1 to 25 have to be removed. These prime numbers are 13, 17, 19 *and* 23. 7 has three multiples among the numbers from 1 to 25: 7,14 *and* 21. At least one of them must be removed, which works only with the deletion of 7. The remaining 20 numbers can be split in two groups that have equal product. For example:

$$3\cdot5\cdot8\cdot14\cdot15\cdot18\cdot20\cdot22\cdot24 = 2\cdot4\cdot6\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot16\cdot21\cdot25$$

28. مضلع منتظم به عشرون رأسًا مرسوم على محيط دائرة. يقوم داوود برسم كل الأوتار الممكنة التي تربط أزواجًا من هذه الرؤوس. كم عدد الأوتار التي تحقق أن يكون طولها أطول من نصف قطر الدائرة ولكن أقصر من قطرها؟

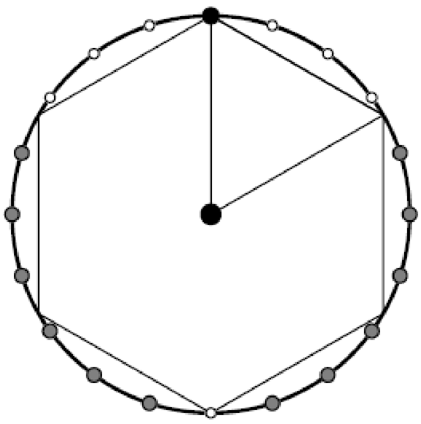
28. A regular polygon with twenty vertices drawn on the circumference of a circle. David draws all the possible chords that connect pairs of these vertices. How many of these chords are longer than the radius of the circle but shorter than its diameter?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
90	100	120	140	160

الحل: **C**

عدد الأوتار المرسومة من كل نقطة هو 19 وتراً. لكي يكون طول الوتر مساوياً لنصف القطر يجب أن تكون زاويته المركزية هي 60°.

المضلع ذو العشرون ضلعاً زاويته المركزية تساوي $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$. هذا يعني أن الأوتار الواصلة بين كل نقطة والنقاط الثلاث الأقرب لها من كلا الجانبين ستكون أقصر من نصف القطر لأن $3 \times 18^\circ = 54 < 60^\circ$، والوتر الواصل بين كل نقطة والنقطة المقابلة لها سيساوي طول القطر. إذن لكل نقطة سنستثني الأوتار الواصلة منها إلى 7 نقاط وبالتالي سيبقى 12 وتراً لكل نقطة. إذن عدد الأوتار المطلوبة يساوي $\frac{20 \times 12}{2} = 120$.



Each of the 20 points is connected with the 19 other points on the circumference, forming 19 chords. One of these 19 chords is exactly equal to the diameter, leaving 18 chords to consider. For a chord to be larger than the radius, its central angle has to be larger than 60◦. Since the 20 points form a regular 20-gon, the central angle of the chord connecting two adjacent points is $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$. Therefore, we need at least 4 central angles ($3 \times 18^\circ = 54 < 60^\circ$). That is, 3 pairs of chords from a point to its three nearest points along the circumference (on either side) are going to be shorter than the radius. This leaves us with 6 pairs of chords, or 12 chords per point. Since each chord is counted twice (once per endpoint) the total number of chords satisfying the condition is $\frac{20 \times 12}{2} = 120$.

29. يوجد n من الخطوط المختلفة في المستوى، سُمّيت $\ell_1,\ell_2,.......,\ell_n$. الخط ℓ_1 يتقاطع تمامًا مع 5 خطوط أخرى. الخط ℓ_2 يتقاطع تمامًا مع 9 خطوط أخرى، والخط ℓ_3 يتقاطع تمامًا مع 11 خط آخر. أيّ مما يلي أصغر قيمة ممكنة لـ n؟

29. There are n distinct lines on the plane, labeled $\ell_1,\ell_2,.......,\ell_n$. The line ℓ_1 intersects exactly 5 other lines, the line ℓ_2 intersects exactly 9 other lines, and the line ℓ_3 intersects exactly 11 other lines. Which of the following is a smallest possible value of n?

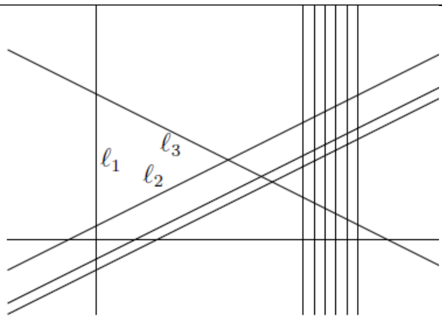
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
11	12	13	14	15

الحل: **B**

بما ان أحد الخطوط يقطع 11 خطاً فإن أقل عدد ممكن هو 12 خطاً.

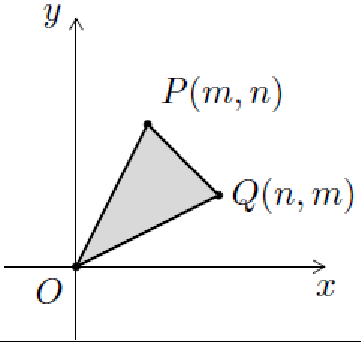
يمكننا تقسيم الخطوط إلى: – مجموعة من 7 خطوط متوازية. – مجموعة من 3 خطوط متوازية تقطع المجموعة الأولى.

– خطان متقاطعان فيما بينهما ويقطعون كل الخطوط الأخرى (كما في الشكل).



Since one of the lines intersects 11 other lines, the minimum number of lines is 12. On the other hand, taking a family of 7 parallel lines, another family of 3 parallel lines perpendicular to the first family and two other lines, intersecting each other and intersecting both families of parallel lines, we have an arrangement of lines that conforms to the requirement. Any of the lines in the first family of 7 parallel lines can be ℓ1, as it intersects 5 other lines. Any of the lines in the second family of 3 parallel lines can be ℓ2 as it intersects 9 other lines. Finally, any of the last two lines can be ℓ3 as it intersects 11 other lines. Therefore, the answer is 12.

30. لنفترض أن m و n عددان صحيحان بحيث $o<m<n$. لتكن $P=(m,n),Q=(n,m),O=(0,0)$. كم عدد الأزواج m و n التي تجعل مساحة المثلث OPQ تساوي 2024؟



30. Suppose *m* and *n* are integers with *0 < m < n*. Let *P = (m, n), Q = (n,m)* and *O = (0, 0)*. For how many pairs of m and n will the area of triangle *OPQ* be equal to 2024?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4	6	8	10	12

الحل: **B**

مساحة المثلث OPQ تساوي

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ n & m & 1\\ m & n & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(n^2-m^2)=2024$$

هذا يعني أن $(n-m)(n+m)=4048$، ولكن $4048=2^4\cdot 11\cdot 23$ ولأن المقدارين $(n-m),(n+m)$ إما زوجيان كلاهما أو فرديان كلاهما، فإن الإمكانات لقيمة المقدارين هي:

$$2\times 2024,2^2\times 1012,2^3\times 506,(2\times 11)\times(2^3\times 23),(2^2\times 11)\times(2^2\times 23),(2^3\times 11)\times(2\times 23)$$

وتكون قيم الزوج $(n,m)\in\{(1013,1011),(508,504),(257,249),(103,81),(68,24),(67,21)\}$

وعددها 6 أزواج.

Area of $\triangle OPQ=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ n & m & 1\\ m & n & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(n^2-m^2)=2024$, that means $(n-m)(n+m)=4048$

But, $4048=2^4\cdot 11\cdot 23$ and $(n-m),(n+m)$ are both eve or odd. There are 6 possibilities for $(n-m),(n+m)$:

$2\times 2024,2^2\times 1012,2^3\times 506,(2\times 11)\times(2^3\times 23),(2^2\times 11)\times(2^2\times 23),(2^3\times 11)\times(2\times 23)$,

so there are 6 possible pairs of (n,m):

$\{(1013,1011),(508,504),(257,249),(103,81),(68,24),(67,21)\}$.